



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



3 3433 06630757 4

44



ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



ANNALES

SCIENTIFIQUES

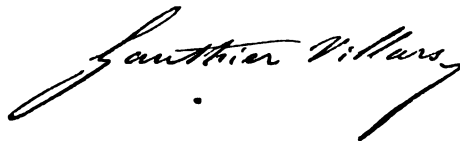
DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1877, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

A handwritten signature in cursive script, reading "Gauthier Villars". The signature is written in dark ink and is positioned to the right of the main text block.

France

3

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

3

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TÔME SEPTIÈME — ANNÉE 1878.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

(Tous droits réservés.)

15

100

150

COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

Sciences mathématiques.

MM.
 BERTRAND, de l'Institut.
 BONNET, de l'Institut.
 BOUQUET, de l'Institut.
 BOURGET, Directeur des Études
 (Sainte-Barbe).
 BRIOT, Prof. à la Sorbonne.
 DARBOUX, Suppl. à la Sorbonne.
 HERMITE, de l'Institut.
 PUISEUX, de l'Institut.

Sciences physiques.

MM.
 BERTHELOT, de l'Institut.
 BERTIN, Sous-Direct. de l'École
 Normale.
 DEBRAY, de l'Institut.
 FRIEDEL, Prof. à la Sorbonne.
 GERNEZ, Professeur à l'École
 Centrale.
 HAUTEFECILLE.
 MASCART, Professeur au Collège
 de France.
 SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri),
 de l'Institut.
 TROOST, Prof. à la Sorbonne.

Sciences naturelles.

MM.
 CLAUDE BERNARD, de l'Institut.
 DELAFOSSE, de l'Institut.
 DELESSE, Ingénieur en chef des
 Mines.
 DES CLOIZEAUX, de l'Institut.
 DE LACAZE-DUTHIERS, de l'In-
 stitut.
 PASTEUR, de l'Institut.
 PERRIER, Prof. au Muséum.
 POUCHET.
 VAN TIEGHEM, de l'Institut.

ADMINISTRATION.

MM. H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE..... *Directeur.*
 BOURGET, Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Secrétaire.*
 GERNEZ, Professeur à l'École Centrale..... *Secrétaire-Adjoint.*



ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

RECHERCHES

SUR LA

CRISTALLISATION DES SOLUTIONS SURSATURÉES,

PAR M. D. GERNEZ.

TROISIÈME MÉMOIRE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SOLUTIONS SURSATURÉES.

INTRODUCTION.

Résumé des Mémoires précédents.

J'ai fait connaître, dans un premier Mémoire consacré à l'étude des solutions sursaturées de sulfate et d'acétate de soude, les expériences qui m'ont conduit à attribuer la cristallisation subite de ces solutions au contact d'une parcelle identique aux cristaux qui s'y produisent lorsqu'elles se prennent en masse cristalline, ou rigoureusement isomorphe de ces cristaux (¹). Dans un second Mémoire, j'ai discuté les travaux qui avaient été entrepris en opposition avec ce résultat, j'ai réfuté les objections qui avaient été faites à mes expériences et étudié

(¹) *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1^{re} série, t. III, p. 166; 1866.

Ann. de l'Éc. Normale. 2^e Série. Tome VII. — JANVIER 1878.

quelques particularités du phénomène ⁽¹⁾. Je me propose, dans ce troisième Mémoire, de passer en revue les propriétés principales des solutions sursaturées, de signaler ce qu'elles ont de plus remarquable et de décrire les expériences qui permettent de généraliser les résultats précédemment obtenus.

Je commencerai cette étude par l'examen détaillé d'une substance dont on s'est peu occupé jusqu'ici et qui présente avec le sulfate de soude, entre autres analogies, celle de donner un hydrate de même composition et de même forme que le sel de Glauber, le chromate de soude. Mais, auparavant, je crois utile de revenir sur la propriété dont jouissent les cristaux, de provoquer la cristallisation des solutions sursaturées des substances qui leur sont isomorphes.

Action des corps isomorphes sur les solutions sursaturées.

Cette propriété est pour ainsi dire évidente *a priori*, si l'on considère comme cristaux isomorphes par définition ceux qui grossissent sans changer de forme dans les solutions les uns des autres. On sait, en effet, par les expériences de Gay-Lussac, que les cristaux des divers aluns se nourrissent dans une solution de l'un quelconque d'entre eux et Mitscherlich a montré qu'il en est de même pour les diverses substances qu'il a appelées *isomorphes* : le dépôt, à l'état solide, du corps dissous s'effectuant dans ces expériences au moment où la solution devient sursaturée, il était infiniment probable qu'un cristal déterminerait subitement dans les solutions sursaturées ce qui se produit aussitôt que la sursaturation commence dans la solution saturée soumise à l'évaporation ou au refroidissement. Cependant, en raison des propriétés, pour ainsi dire spéciales, qu'on attribuait alors aux solutions sursaturées, j'avais jugé utile, dans un premier Mémoire, de donner une démonstration expérimentale de l'action des corps isomorphes; et, comme j'établissais que le contact d'une parcelle, si petite qu'elle fût, d'une substance en fait cristalliser la solution sursaturée, il fallait, pour que la démonstration eût quelque valeur, ne faire agir sur les solutions que des substances ne contenant pas la moindre trace de la

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. V, p. 9; 1876.

matière dissoute, et c'est ce que j'ai fait dans des expériences sur les sulfates de magnésie, de nickel et de zinc à 7H₂O, publiées dans le courant de 1866 (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1^{re} série, t. III, p. 199) et plus tard, dans des expériences sur l'alun de thallium dont les solutions étaient touchées par des cristaux des autres aluns exempts de thallium (*Revue des cours scientifiques*, 1^{re} série, t. IV, p. 218⁽¹⁾).

(¹) Huit ans après la publication de ses expériences (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 397; 8 février 1875), M. Lecoq de Boisbaudran a trouvé qu'il avait des droits d'antériorité à faire valoir relativement à cette démonstration, et il a déclaré formellement qu'il avait le premier établi, dans un Mémoire publié à la fin d'octobre 1866, dans les *Annales de Chimie et de Physique* (4^e série, t. IX, p. 173), que les solutions sursaturées cristallisent au contact d'un cristal isomorphe de la matière dissoute. Les termes dans lesquels cette revendication a été présentée m'obligent de mettre le lecteur à même de juger de sa valeur.

Les expériences sur lesquelles M. Lecoq de Boisbaudran fonde sa réclamation ont porté sur les solutions sursaturées d'alun de chrome et de sulfate de nickel.

1° Sur l'alun, il n'y a qu'une seule expérience dont voici le résultat : la solution sursaturée d'alun de chrome au contact d'un cristal d'alun ordinaire donne, suivant l'auteur, des cristaux qui diffèrent des octaèdres qu'on obtient en semant de l'alun de chrome, mais qui sont les mêmes que si l'on n'avait rien semé ou si l'on avait semé du sulfate de potasse.

Quelle que soit l'explication que l'auteur puisse maintenant essayer de cette observation, elle établit bien évidemment le contraire de la proposition qu'il dit avoir démontrée.

2° M. Lecoq de Boisbaudran a introduit dans les solutions sursaturées de sulfate de nickel des cristaux de dix-sept substances différentes; sept d'entre elles, essayées deux fois, ont été inactives, ainsi qu'une huitième essayée une fois; les autres se sont comportées de la manière suivante :

Biméta-antimoniato de potasse.....	1 fois actif.	3 fois inactif.
Sulfate de lithine.....	1 »	2 »
Sulfate de cuivre.....	4 »	4 »
Sulfate d'alumine.....	5 »	5 »
Sulfate de fer.....	10 »	8 »
Sulfate de zinc.....	9 »	1 »

Enfin le sulfate de magnésie, le citrate de magnésie et le bromure de cadmium ont toujours été actifs.

Tels sont les résultats que M. Lecoq de Boisbaudran transcrit de son registre d'expériences, sans donner la moindre indication sur la composition des hydrates cristallisés qu'il a employés ni sur celle des cristaux qu'il a obtenus.

A moins d'avoir la prétention, contraire aux règles de la méthode scientifique, de décider qu'une substance agit ou n'agit pas d'après la *majorité* des résultats observés, positifs ou négatifs, la seule conclusion légitime que l'on puisse tirer de ces expériences, en les supposant exactes, serait la négation de l'action de sisomorphes sur la cristallisation, puisque, d'une part, le sulfate de zinc, isomorphe du sulfate de nickel, n'en fait pas toujours cristalliser la solution et que, d'autre part, le citrate de magnésie et le chlorure de cadmium, qui n'ont pas la

Depuis j'ai employé, pour la même vérification, une substance rigoureusement isomorphe du sulfate de soude et qui est de nature telle, qu'on peut préparer sûrement du sulfate de soude qui en soit exempt : c'est le chromate de soude NaOCrO^3 , 10HO . Les solutions sursaturées de cette substance, touchées au-dessous de 23 degrés par une parcelle de sulfate de soude ordinaire, donnent des cristaux tout à fait semblables à ceux qu'abandonnent dans le même cas les solutions sursaturées de sulfate de soude.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DU CHROMATE DE SOUDE.

1° *Action de la chaleur sur le chromate de soude à 10HO .* — Le chromate de soude à 10 équivalents d'eau cristallise comme le sulfate de soude dans le système du prisme oblique à base rectangulaire, en affectant des formes dont les angles sont, à quelques minutes près, ceux que présentent les cristaux de sulfate de soude.

La détermination exacte de la température de fusion de ces cristaux, et en général des corps mauvais conducteurs de la chaleur, présente des difficultés sérieuses, qui font qu'il y a très-peu de températures de fusion sur lesquelles les physiciens soient d'accord. C'est pour cette raison que je crois devoir indiquer le procédé que j'ai employé pour effectuer cette détermination, procédé qui est applicable à tous les corps susceptibles de surfusion et qui me paraît présenter l'avantage, sinon d'une exécution rapide, au moins d'une précision pour ainsi dire illimitée. On se sert d'un tube de verre de 2 à 3 centimètres

moindre relation d'isomorphisme avec ces substances, sont toujours actifs. C'est pourtant ainsi que M. Lecoq de Boisbaudran croit avoir établi l'action des isomorphes sur les solutions sursaturées. Il est à peine besoin de faire remarquer qu'avec ces mêmes expériences l'auteur pouvait formuler des conclusions opposées à celles qu'il en a déduites, mais qui n'auraient pas eu plus de valeur au point de vue de la démonstration.

Du reste, ces expériences ne sont pas exactes et, dans les conditions indiquées, les solutions sursaturées de sulfate de nickel ne donnent des cristaux à 7HO qu'autant qu'elles sont touchées par des cristaux rigoureusement isomorphes, tels que ceux de sulfate de zinc et de sulfate de magnésie à 7HO , qui ont une composition chimique analogue.

de diamètre, fermé à une de ses extrémités et contenant, sur une hauteur de 5 à 6 centimètres, la substance dont on veut avoir la température de solidification ; suivant l'axe du tube est disposé un thermomètre retenu par un bouchon, qui est ajusté sur l'orifice du tube et percé d'un second trou par lequel on peut introduire une tige de verre. Après avoir fondu le corps complètement, on introduit le tube dans un bain-marie dont la température est un peu inférieure au point de fusion présumé ; puis, lorsque la température du liquide est devenue sensiblement égale à la température ambiante, on provoque la solidification en introduisant à l'aide de la tige de verre quelques parcelles de la nature des cristaux que l'on veut produire : on agite alors le liquide en voie de solidification, pour rendre la température plus uniforme et la solidification plus rapide. Il suffit pour cela de communiquer au bouchon un mouvement de rotation autour de son axe, alternativement dans un sens et dans l'autre : le thermomètre reste sensiblement suivant l'axe du tube ; la baguette de verre se déplace à l'intérieur du liquide en y portant les germes cristallins dont on l'a couverte, et elle communique en même temps au liquide un déplacement qui rend plus uniforme la répartition de la chaleur. La température indiquée par le thermomètre intérieur atteint rapidement un maximum, puis diminue lentement. On recommence l'expérience en amenant le bain ambiant à une température très-peu inférieure au maximum précédent ; on y introduit une seconde fois le corps liquéfié dont on détermine la solidification de la même manière ; le thermomètre indique un nouveau maximum très-rapproché du précédent et, après quelques opérations de ce genre, on arrive à des nombres assez peu différents pour qu'on puisse prendre le dernier comme température de solidification du corps. On reconnaît du reste qu'on a dépassé le point de fusion lorsque l'introduction d'un cristal ne provoque plus la solidification.

Les cristaux de chromate de soude à 10 HO, débarrassés par plusieurs cristallisations successives d'eau mère interposée, fondent à une température notablement supérieure à 22 degrés et de très-peu inférieure à 23 degrés vers 22°,9. Au-dessus de cette température la production de ces cristaux est donc impossible.

2° *Chromate de soude à 4 HO.* — Si l'on porte le liquide provenant de la fusion des cristaux NaOCrO_3 , 10 HO à une température supérieure

à 23 degrés dans un vase ouvert, en présence d'un milieu sec, il y a dégagement de vapeur d'eau, et le liquide concentré peut donner, lorsque l'évaporation est suffisante, des cristaux qui sont moins hydratés que les précédents et que l'on avait regardés jusqu'ici comme étant du chromate de soude anhydre (1). J'ai préparé avec grand soin ces cristaux, et j'ai reconnu que 1^{er}, 683 perdent 0^{er}, 519 lorsqu'on les chauffe au rouge, ce qui correspond au dégagement de 4 équivalents d'eau à $\frac{1}{200}$ près, la perte calculée étant 0^{er}, 517. Cet hydrate $\text{NaOCrO}_3, 4\text{HO}$ paraît cristalliser dans le système du prisme droit à base rectangulaire, il est d'un jaune un peu plus foncé que l'hydrate à 10HO. Il devient liquide sous l'influence de la chaleur; mais, comme il ne présente pas le phénomène de la surfusion d'une manière bien prononcée, on ne peut employer avantageusement, pour déterminer la température de fusion, le procédé que j'ai indiqué plus haut. Ce qui m'a paru le plus sûr pour obtenir le point de fusion, c'est d'observer de trente secondes en trente secondes la température d'un thermomètre plongé dans le liquide et entouré d'un bain à température constante, très-peu inférieure à la température de fusion déterminée approximativement par des expériences antérieures. En agitant le liquide au moyen du thermomètre, on observe qu'après avoir baissé rapidement, depuis 62 degrés par exemple, il indique une température qui reste plusieurs minutes stationnaire à 60 degrés et baisse ensuite très-rapidement. On peut donc prendre 60 degrés comme température de fusion de l'hydrate $\text{NaOCrO}_3, 4\text{HO}$.

Du reste, il n'est pas nécessaire pour la production de ces cristaux que la température du liquide soumis à l'évaporation soit supérieure au point de fusion du sel à 10HO ni que la solution de chromate de soude soit très-concentrée; on les obtient aussi au moyen d'une solution même très-étendue, que l'on concentre à la température ordinaire dans un milieu sec, à la condition de préserver le liquide de parcelles du chromate à 10HO. La solution soumise à l'évaporation devient à la longue assez riche en sel pour pouvoir être considérée comme une solution sursaturée même par rapport au sel à 4HO; et, si la température ambiante ne descend pas au-dessous de 2 à 4 degrés, elle aban-

(1) *Dictionnaire de Chimie pure et appliquée*, t. I, p. 895.

donne spontanément des cristaux à 4HO, que l'on pourrait du reste y faire naître à volonté par le contact d'un cristal de même composition.

Dans le cas où la température ambiante descendrait au-dessous de zéro, on verrait le liquide suffisamment concentré par évaporation se prendre en une masse de cristaux à 10HO.

Un moyen sûr d'obtenir l'hydrate $\text{NaO} \cdot \text{CrO}_3 \cdot 4\text{HO}$, débarrassé de cristaux à 10HO, consiste à faire à chaud une solution très-concentrée de chromate de soude, à l'abandonner au refroidissement dans un milieu entretenu à une température supérieure à 23 degrés, température à laquelle les cristaux de chromate à 10HO ne peuvent exister, puis à semer un cristal à 4HO qui ne laisse déposer que des cristaux identiques à lui-même; enfin à comprimer fortement le sel ainsi obtenu entre des doubles de papier buvard chauffés aussi à une température supérieure à 23 degrés, jusqu'à ce qu'il ne retienne plus d'eau mère interposée.

3° *Chromate de soude anhydre.* — Si l'on chauffe ces cristaux à une température supérieure à 60 degrés en vase ouvert, on leur enlève les éléments de l'eau et l'on obtient d'abord du chromate anhydre sous forme d'une poudre d'un beau jaune clair : à une température plus élevée cette poudre éprouve un changement de couleur de plus en plus prononcé. Successivement jaune foncé, orangé, orangé rouge, ce corps devient franchement rouge à une température élevée. On peut l'amener à l'état liquide en le chauffant dans une capsule de platine à la flamme d'un chalumeau à gaz : il est alors très-fluide, transparent et d'un rouge foncé. Ce changement de couleur que l'on observe dans un grand nombre de sels colorés ne dépend que de l'état calorifique du corps, car la teinte du chromate anhydre est toujours la même quand il est porté à la même température. Refroidi lentement ou subitement, il présente en sens inverse toutes les nuances par lesquelles il a passé dans la période d'échauffement; ce changement est pour ainsi dire instantané : si, après avoir chauffé le sel en couche mince dans une capsule de platine, de manière à le rendre d'un rouge foncé, on amène le fond de la capsule à la surface d'un bain d'eau froide, le sel redevient immédiatement jaune, et il se prête indéfiniment à la même expérience.

Le chromate de soude anhydre mis au contact de l'eau à la température ordinaire s'hydrate en dégageant une grande quantité de chaleur :

introduit à l'état pulvérulent dans un tube de verre bouché à un bout avec une quantité d'eau inférieure à celle qui formerait avec lui l'hydrate 10HO , il s'échauffe assez pour que la température s'élève de 18 degrés à 55 degrés. L'élévation de température est naturellement décroissante lorsqu'on ajoute plus d'eau au sel anhydre ; mais dans aucun cas, si l'on opère à l'abri des poussières de sulfate ou de chromate de soude à 10HO , on n'obtient, après refroidissement, des cristaux à 10HO ; le liquide constitue toujours une solution sursaturée que l'on peut préparer encore en ajoutant graduellement à un poids d'eau déterminé des quantités croissantes de chromate anhydre. Cette expérience est tout à fait semblable à celle qui a été signalée, pour la première fois à ma connaissance, sur le sulfate de soude anhydre, par M. L.-C. de Coppet.

Le chromate de soude anhydre peut aussi prendre naissance comme le sulfate de soude au sein des solutions sursaturées ; on l'obtient facilement en fondant les cristaux à 10HO et chauffant pendant quelques minutes le liquide obtenu à la température d'ébullition : on voit alors, pendant le refroidissement, le liquide devenir trouble et déposer du chromate anhydre qui produit sur la lumière les mêmes effets de chatoiement que présentent les précipités de fluosilicate de potasse, avec cette différence que la couleur jaune du liquide masque un peu l'éclat du phénomène. Ce sel anhydre se dépose peu à peu à la partie inférieure du liquide qui constitue alors une solution sursaturée très-concentrée dans laquelle on peut faire naître à volonté, sous l'influence d'un germe cristallin, soit l'un, soit l'autre des deux hydrates. Cette solution peut du reste se conserver liquide au contact du dépôt de sel anhydre, pourvu que sa température ne descende pas au-dessous de 5 degrés ou 10 degrés si la solution est très-concentrée. Dans le cas où le liquide est trop refroidi, il se forme au contact du sel anhydre des cristaux de sel à 4HO , à une température où ces cristaux ne prendraient pas naissance spontanément, et il reste après ce dépôt un liquide qui contient assez de matière en dissolution pour former une solution sursaturée capable de donner des cristaux de chromate de soude à 10HO ; de sorte que l'on peut facilement séparer d'une même solution et à la même température du chromate anhydre, puis des cristaux de l'hydrate à 4 équivalents d'eau et enfin de l'hydrate à 10 équivalents d'eau.

4° *Chromate de soude effleuri*. — Le chromate de soude à 10HO abandonne dans l'air sec les éléments de l'eau ; les cristaux s'effleurissent à partir de la surface, et au bout d'un temps très-court, si l'on opère sous une cloche contenant un vase à acide sulfurique et si l'on y entretient le vide, ils ne retiennent qu'une quantité d'eau extrêmement faible et donnent une poussière dont la composition diffère assez peu de celle du chromate anhydre pour que la perte de poids que l'on constate, en les chauffant au rouge, soit de l'ordre des erreurs de pesée. Dans cet état, le sel effleuri agit sur la solution sursaturée de chromate de soude de la même manière que les cristaux à 10HO. C'est là une particularité analogue à celle que j'ai signalée dans le cas du sulfate de soude et que j'ai étudiée en détail dans les *Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. V, p. 36.

Les cristaux de l'hydrate $\text{NaO} \cdot \text{CrO}_3 \cdot 4\text{HO}$, abandonnés à l'air libre, ne semblent généralement pas s'effleurir ; mais, si l'air est parfaitement sec, ou mieux si l'on opère dans le vide sec, on peut assez rapidement en provoquer l'efflorescence. La poussière jaune que l'on obtient ainsi retient d'autant moins d'eau que l'expérience a été plus longtemps prolongée, et l'on arrive bientôt à constater que la perte qu'elle subit lorsqu'on la chauffe au rouge est extrêmement faible : sa composition diffère donc d'aussi peu qu'on voudra de celle du chromate de soude anhydre, comme celle qui provient des cristaux à 10HO ; mais elle se distingue de cette dernière par une propriété remarquable : c'est que, amenée au contact d'une solution sursaturée très-concentrée de chromate de soude, elle provoque immédiatement la formation des cristaux $\text{NaO} \cdot \text{CrO}_3 \cdot 4\text{HO}$, identiques à ceux dont elle provient. J'ai fait voir (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 283) que le sulfate de soude $\text{NaO} \cdot \text{SO}_3 \cdot 7\text{HO}$, amené à perdre par efflorescence, à la température ordinaire, la presque totalité des éléments de l'eau qu'il contient, donnait lieu, dans les solutions sursaturées concentrées, à la production de cristaux dont la composition et la forme étaient identiques à celles qu'ils avaient avant l'efflorescence. C'est une analogie de plus à ajouter à celles que j'ai signalées plus haut. Elle est, du reste, aussi complète que possible, car le contact d'une parcelle de chromate de soude rendu anhydre par la chaleur produit sur la solution sursaturée concentrée des effets différents de ceux qu'on observe avec les sels effleuris. Ainsi,

tandis que la poussière provenant du chromate de soude à 4HO produit immédiatement des cristaux de même composition et de même forme, le chromate anhydre obtenu par l'action de la chaleur semble rester pendant quelque temps inactif, et ce n'est que plus tard qu'il se couvre de pointes cristallines de l'hydrate à 4HO.

J'estime qu'il n'y a pas plus ici que dans le cas du sulfate de soude lieu d'admettre l'existence de trois variétés isomériques du chromate de soude anhydre : celle qui résulte de l'action de la chaleur et celles qu'on obtient en soumettant à l'efflorescence les cristaux des deux hydrates. On peut en effet, comme je l'ai déjà fait remarquer à propos du sulfate de soude, supposer qu'il reste dans les hydrates effleuris une parcelle de l'hydrate primitif, laquelle, si petite qu'on la suppose, suffit pour provoquer la cristallisation. Et du reste, si l'on n'admet pas qu'une parcelle de ce genre persiste dans le sel effleuré, on pourrait se représenter les choses peut-être plus exactement en considérant d'une manière générale une parcelle d'un hydrate cristallisé comme formant un édifice, d'une forme déterminée, où les éléments de l'eau occuperaient une place inconnue sans doute, mais qu'ils abandonneraient pendant l'efflorescence sans que le reste de l'édifice fût modifié. Au contact d'un liquide qui lui rendrait les éléments de l'eau, la parcelle se compléterait en reprenant sa forme initiale. On s'expliquerait facilement ainsi comment il se fait que la forme et la composition des hydrates obtenus sont toujours les mêmes que celles des cristaux primitifs.

5° *Analogies que présentent les solutions sursaturées de sulfate et de chromate de soude.* — On voit par ce qui précède que les propriétés du chromate de soude sont analogues à celles du sulfate de soude, avec cette différence que, dans les circonstances où les solutions sursaturées de sulfate de soude abandonnent des cristaux à 7HO, celles de chromate de soude donnent l'hydrate $\text{NaOCrO}_3, 4\text{HO}$; mais, dans l'un comme dans l'autre cas, le liquide au sein duquel se sont développés ces cristaux constitue une solution sursaturée où l'on peut faire naître des cristaux à 10HO par le contact, soit du sulfate de soude à 10HO, soit du chromate de soude isomorphe.

On pourra donc répéter avec les solutions sursaturées de chromate de soude toutes les expériences par lesquelles j'ai établi que la cristallisation subite des solutions sursaturées de sulfate de soude, main-

tenues entre des limites déterminées de température, est due à des parcelles de sulfate de soude effleuri ou non, qui existent normalement dans l'air des lieux habités et même de la campagne, et qui se déposent sur la surface des corps à la manière des poussières solides, et les résultats que l'on obtiendra seront identiques à ceux que donnent les solutions de sulfate de soude. J'ai reconnu que toutes les dispositions expérimentales indiquées dans mon premier Mémoire, et qui permettent de garder inaltérées les solutions sursaturées de sulfate de soude dans des vases ouverts, mais préservés des poussières atmosphériques, conviennent également pour conserver les solutions sursaturées de chromate de soude, et aussi que, dans toutes les circonstances où la solution sursaturée de sulfate de soude cristallise, celle de chromate de soude cristallise également, pourvu que la température soit inférieure à 23 degrés, point de fusion des cristaux à 10HO que l'on veut produire.

Je ne crois pas utile de donner le détail de tous ces essais, dont on aura une idée exacte en se reportant à mon premier Mémoire ; je me contenterai de faire remarquer qu'il convient dans toutes ces expériences, à cause de la grande solubilité et de la fusibilité facile des cristaux à 10 équivalents d'eau, d'opérer à une température extérieure qui ne dépasse pas 10 à 12 degrés, si l'on veut que le dépôt cristallin soit considérable ; à moins qu'on ne fasse usage d'une solution obtenue en chauffant les cristaux à 10HO avec une quantité d'eau extrêmement petite.

J'ajouterai que j'ai essayé sur cette solution les 276 substances dont j'avais recherché l'action sur la solution sursaturée de sulfate de soude, et, de plus, 24 autres dont on trouvera la liste plus loin, de manière à porter à 300 le nombre de ces produits de laboratoire. J'ai reconnu que le contact de tous ces corps, à l'exception du chromate de soude à 10HO, était impuissant à provoquer la cristallisation de la solution sursaturée de chromate de soude, lorsqu'ils ne contenaient pas des parcelles de sulfate de soude à 10HO. Il est arrivé dans ces essais, comme dans ceux auxquels j'avais soumis les solutions de sulfate de soude, que le contact de plusieurs corps a paru déterminer la cristallisation ; dans ce cas, si les corps étaient insolubles dans l'eau, ils perdaient leur action par un simple lavage à l'eau distillée ; si, au contraire, ils étaient solubles dans l'eau, on les rendait facilement inactifs en les faisant cris-

talliser après addition d'une petite quantité d'un sel de baryte, pour les débarrasser de toute trace de sulfate de soude. On peut donc conclure de toutes ces expériences que, pour le chromate de soude comme pour le sulfate de soude, la seule substance qui provoque la cristallisation des solutions sursaturées, c'est un cristal de même composition et de même forme que ceux que l'on veut y produire ou un cristal rigoureusement isomorphe.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Préparation des solutions sursaturées.

Les solutions sursaturées des diverses substances ne s'obtiennent pas toutes avec la même facilité. Ainsi, tandis qu'on prépare aisément celles de sulfate, de chromate, d'acétate et d'hyposulfite de soude, d'azotate de chaux, d'alun, etc., en ajoutant des quantités convenables d'eau à un poids déterminé de sel, portant le liquide à l'ébullition et laissant refroidir à la température ordinaire, on ne réussit à conserver à l'état de sursaturation certaines autres solutions qu'à la condition de les maintenir à une température supérieure à une certaine limite, qui est plus ou moins élevée au-dessus de la température ordinaire; c'est ce qui arrive avec les solutions sursaturées d'acétate de plomb, de phosphate de soude, etc., qui se prennent en masse lorsqu'elles sont amenées à une température inférieure à 10 degrés; il est aussi des solutions qui ne peuvent retenir qu'un faible excès de la matière dissoute: telles sont les solutions d'azotate de plomb, de bichromate de potasse, de ferrocyanure de potassium. Il convient donc d'opérer de manières différentes suivant la nature du corps soumis à l'expérience. Dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire lorsque la solution concentrée paraît abandonner immédiatement des cristaux en se refroidissant, voici comment on réussit souvent à observer la sursatu-

ration : on laisse séjourner pendant quelque temps un grand excès de la substance au contact du dissolvant ; on filtre avec soin la solution saturée que l'on amène au fond d'un ballon très-propre ; on chauffe alors de manière à chasser une petite quantité du dissolvant et l'on a soin en même temps de donner au ballon un mouvement de gyration pour empêcher la projection et la formation de cristaux sur ses parois. On abandonne ensuite le ballon à un refroidissement lent, pendant lequel on en maintient le col dans une direction horizontale, pour empêcher la chute accidentelle de poussières cristallines jusque dans le liquide ; et, lorsqu'il a repris la température initiale en tous ses points, il arrive souvent qu'il ne s'est pas déposé de cristaux : on en conclut que la solution est susceptible de sursaturation à la température de l'expérience, et l'on s'en assure en introduisant dans le liquide, à l'extrémité d'une tige effilée, une quantité très-petite de poussière cristalline de la substance qui produit des cristaux dont on peut suivre l'accroissement.

La méthode qui consiste à évaporer sans changement de température une solution saturée ne peut être employée fructueusement que si l'évaporation a lieu à l'abri des poussières de l'air. On peut déterminer cette évaporation en refroidissant un récipient qui communique avec le vase contenant le liquide ; mais il faut éviter tout renouvellement de gaz à la surface de la solution, ou bien ne laisser arriver jusqu'au liquide que de l'air tamisé dans un tube rempli de coton qui arrête les germes cristallins que l'on dissémine toujours dans le laboratoire, quelque soin qu'on apporte aux expériences ; il faut de plus que l'évaporation soit extrêmement lente, car l'émission de la vapeur par la surface du liquide produit le double effet de concentrer beaucoup la solution dans la couche superficielle et de lui emprunter une grande quantité de chaleur ; il pourra donc arriver, dans le cas d'une évaporation rapide, que la cristallisation commence et se propage dans toute la masse si un seul point de la surface se trouve amené à une température inférieure à celle où cesse la sursaturation. C'est pour cette raison que la sursaturation des corps dissous dans les liquides très-volatils est plus facile à réaliser dans des vases où la surface libre du liquide est très-petite, dans des ballons de verre soufflés à l'extrémité de tubes étroits et entièrement remplis, par exemple, que

dans des vases qui présentent à l'air une surface considérable, sur laquelle un courant d'air pourra produire un refroidissement local suffisant pour déterminer la cristallisation.

Il est un autre procédé préconisé par M. Lecoq de Boisbaudran et qui consiste à mélanger deux solutions capables de donner une solution sursaturée, résultant de l'échange des éléments mis en présence. C'est ainsi qu'en mêlant une solution de chlorure de calcium avec une solution de sulfate de soude suffisamment concentrée, on obtient un liquide qui ne précipite pas spontanément du sulfate de chaux, bien que, par le contact d'une parcelle de cette substance, on puisse en déterminer un dépôt abondant. L'étude de pareils mélanges est certainement de nature à éclairer la formation d'un grand nombre de précipités, mais il faut se garder de les assimiler complètement aux solutions d'une substance déterminée et unique dans un dissolvant tel que l'eau : le phénomène est plus complexe ; il est clair, en effet, que le mélange considéré ci-dessus, par exemple, est un liquide mixte contenant les chlorures de calcium et de sodium et les sulfates de soude et de chaux en proportions qui correspondent, suivant une loi qui n'est pas encore connue, aux quantités relatives des deux solutions mises en présence. On peut du reste soutenir, car la preuve du contraire est difficile à donner, que l'intervention d'un germe cristallin modifie l'équilibre de ce système mixte en déterminant la production de l'un des éléments en quantité différente de celle qui préexistait dans le liquide. L'étude des solutions sursaturées obtenues de cette manière dépend donc d'un plus grand nombre d'éléments que celle des solutions d'une substance unique mise en présence d'un seul dissolvant ; aussi n'envisagerons-nous d'abord que ces dernières solutions.

Généralité du phénomène de la sursaturation.

A l'époque où j'ai fait connaître les premiers résultats de mes expériences sur les solutions sursaturées, 28 substances avaient été signalées par divers savants comme jouissant de la propriété de donner des solutions aqueuses sursaturées : ce sont les sulfates de soude, de magnésie, de fer et l'alun, mentionnés sous ce rapport dans les Traités de Chimie

de la fin du siècle dernier (1); le carbonate, le phosphate et le borate de soude signalés par Gay-Lussac (2); l'azotate d'argent par Thenard (3); les azotates de chaux et de cuivre, l'acétate de plomb par Fischer (4); le chlorure de calcium et le sulfate de cuivre par Coxe (5); le bisulfate de potasse par Green (6); l'hyposulfite de soude par Heeren (7); l'azotate et l'oxalate d'ammoniaque, le bichromate de potasse, le sulfate d'ammoniaque et de magnésie, le sulfate de zinc, le chlorure de baryum, le cyanoferrure de potassium, le tartrate de soude et de potasse, le tartrate d'antimoine et de potasse par Ogden (8); l'azotate d'alumine par Mulder (9); l'acétate de soude par Gmelin (10); l'azotate de lithine par Kremers (11); et de plus le séléniate et le tartrate de soude. Le petit nombre de ces corps avait fait regarder le phénomène de la sursaturation comme une particularité curieuse, mais exceptionnelle; en réalité il n'en est pas ainsi, et, en essayant les solutions dans les conditions que j'ai rappelées plus haut, j'ai reconnu qu'on peut obtenir à l'état de sursaturation des substances qu'un examen superficiel ferait considérer comme ne donnant pas de solutions sursaturées. Le tableau suivant comprend, outre les noms des 28 substances signalées plus haut, ceux de 92 corps dont j'ai obtenu le plus facilement des solutions aqueuses sursaturées.

(1) « It happens sometimes, in attempting to crystallize some salts, that although the liquor be duly evaporated, and then allowed to cool it does not crystallize: the whole remains still fluid. This happens only with some of the salts, and only when the saline liquor is allowed to cool slowly and without being disturbed... Glauber's and Epsom salts are those which exhibit it to most advantage. Alum and copper as also do very well. » *Lectures on the elements of Chemistry, delivered in the University of Edinburg*, by the late Joseph Black, now published from his manuscripts by John Robison. Edinburg, t. I^{er}, p. 361; 1803.

(2) *Annales de Chimie*, 1^{re} série, t. LXXXVII, p. 225; 1813.

(3) *Traité de Chimie*, t. II, p. 316; 1814.

(4) *Journal de Schweigger*, t. XII, p. 187; 1814.

(5) *Observations on Crystallization*; THOMSON, *Annals of Philosophy*, t. VI, p. 101; 1815.

(6) *Gilbert's Annalen*, t. LXX, p. 320; 1822.

(7) *Poggendorff's Annalen*, t. VII, p. 55; 1826.

(8) *Observations on saline Crystallization* (*New Edinburgh Philosophical Journal*, t. XIII, p. 309; 1832).

(9) *Journal für praktische Chemie*, t. XVI, p. 293; 1839.

(10) GMELIN, *Handbuch der Chemie*, t. I, p. 11 de l'édition anglaise.

(11) *Poggendorff's Annalen*, t. XCII, p. 520; 1854.

Substances dont on obtient facilement des solutions aqueuses sursaturées.

Acétates de baryte, de cadmium, de cobalt, de magnésie, de manganèse, de plomb, de soude, de strontiane, de zinc.
Biacétates d'ammoniaque, de potasse.
Azotates d'alumine, d'ammoniaque, d'argent, de cadmium, de chaux, de cobalt, de cuivre, de fer, de lithine, de magnésie, de manganèse, de nickel, de strontiane, d'urane, de zinc.
Azotites de plomb, de potasse.
Arséniates d'ammoniaque, de potasse, de soude.
Benzoates d'ammoniaque, de potasse.
Borates d'ammoniaque, de soude.
Bromures de cadmium, de calcium.
Carbonate de soude.
Chlorates d'argent, de baryte, de chaux, de soude, de strontiane.
Chlorures d'antimoine, de baryum, de cadmium, de calcium, de cobalt, d'étain, de fer, de magnésium, de manganèse, de nickel; sesquichlorure de fer; bichlorure de cuivre.
Citrates d'ammoniaque, de potasse, de soude.
Chromate de soude; bichromate de potasse.
Cyanoferrure de potassium.
Formiates de soude, de strontiane.
Hydrates de baryte, de strontiane, de chloral.
Hyposulfites d'ammoniaque, de chaux, de soude.
Hyposulfate de soude.
Lactate de soude.
Molybdate d'ammoniaque.
Nitroprussiate de potasse.
Oxalate d'ammoniaque.
Phosphates d'ammoniaque, d'ammoniaque et soude, de soude.
Phosphite de soude.
Pyrophosphate de soude.
Séléniate de soude.
Sulfates de cobalt, de cuivre, de fer, de glucine, de magnésie, de manganèse, de nickel, de soude, de zinc; d'ammoniaque et fer, d'ammoniaque et magnésie, de potasse et nickel, de zinc et magnésie; bisulfate de potasse; aluns d'ammoniaque, de potasse, de soude, de thallium, de chrome, de fer.
Sulfite de soude; bisulfite d'ammoniaque.
Sulfhydrate de sulfure de potassium, de sodium.
Sulfo-antimoniate de soude.
Sulfovinates de baryte, de soude.
Tartrates d'ammoniaque, de soude; d'antimoine et ammoniaque, d'antimoine et potasse, de soude et ammoniaque, de soude et potasse, de soude et thallium.
Paratartrate neutre de potasse.
Acides citrique, paratartrique.
Sucres de lait, de canne; mannite.

On voit, en parcourant ce tableau, que la plupart des substances dont les solutions s'observent le plus facilement à l'état de sursaturation sont des corps qui peuvent donner un ou plusieurs hydrates cristallisés; mais cette remarque n'a rien d'absolu, car l'azotate d'argent et le bichromate de potasse par exemple, connus depuis très-longtemps pour donner des solutions sursaturées, cristallisent à l'état anhydre. Il en est de même du chlorate de soude, du formiate de strontiane.

Les substances dont il est facile d'obtenir des solutions sursaturées sont trop nombreuses pour qu'il y ait lieu de signaler en détail toutes les particularités qu'elles présentent : je me bornerai à l'examen d'un petit nombre, sur lesquelles je généraliserai les résultats obtenus sur le sulfate, le chromate et l'acétate de soude; je les choisirai de manière que leur étude caractérise les divers cas que l'on rencontre le plus fréquemment, et j'insisterai principalement sur les propriétés générales que présentent leurs solutions.

I. — Expériences sur les solutions analogues à celles de sulfate de soude.

Généralisation des résultats obtenus avec le sulfate de soude.

Le carbonate de soude, l'hyposulfite de soude, l'azotate de chaux, le sulfate de magnésie, l'alun et l'acétate de plomb sont des substances dont il est très-facile de préparer des solutions sursaturées, et elles se prêtent aussi aisément que l'acétate de soude à toutes les expériences que j'ai décrites précédemment : je vais sommairement indiquer les résultats auxquels m'a conduit leur étude.

1° *Leurs solutions sursaturées se conservent indéfiniment, entre certaines limites de température, dans des vases où elles n'ont pas le contact de l'air extérieur.* — Les expériences qui établissent ce résultat sont identiques à celles que j'ai fait connaître dans mon premier Mémoire : je crois inutile d'en exposer les détails.

2° *L'air ordinaire, lorsqu'il provoque la cristallisation, agit sur ces solutions sursaturées par un corps solide qu'il tient en suspension.* — Les solutions d'alun sont les seules qui cristallisent dans un vase largement ouvert; les autres peuvent être abandonnées à l'air libre pendant

des mois entiers sans que la cristallisation se produise ; il suffit pour cela de ne point laisser de parcelle solide de la substance dissoute sur les parois des vases et d'éviter d'en disséminer dans le voisinage.

3° *Le corps solide qui provoque la cristallisation de ces solutions sursaturées devient inactif à partir d'une température déterminée, toujours la même pour la même substance.* — On détermine avec précision cette température au moyen d'un thermomètre dont le réservoir recouvert d'une couche très-mince de la substance est introduit au centre d'un flacon plein d'air. On chauffe ce flacon à l'aide d'un bain-marie maintenu à une température constante, et, lorsque le thermomètre du flacon indique une température stationnaire depuis dix minutes, on le retire, on abandonne l'appareil au refroidissement jusqu'à ce que le thermomètre soit revenu à la température ambiante, et on laisse tomber dans la solution sursaturée une petite quantité de la matière pulvérulente qui le recouvre ; par une série d'essais de ce genre, à des températures croissantes, on arrive à une température où la substance a perdu son efficacité, on rapproche alors les températures des essais et l'on resserre enfin le point cherché entre deux températures peu différentes.

On trouve ainsi que la substance qui détermine la cristallisation devient inactive :

Pour le carbonate de soude.....	entre	36,7	et	37°
Pour l'hyposulfite de soude.	entre	48,9	et	50,3
Pour l'azotate de chaux.....	entre	41,5	et	42,3
Pour l'acétate de soude.....	entre	57,2	et	58,7 (¹)
Pour le sulfate de magnésie.....	entre	64,1	et	64,3
Pour l'alun.....	entre	97,3	et	98
Pour l'acétate de plomb.....	entre	188,8	et	189,7

4° *Le corps solide qui fait cristalliser chaque solution sursaturée est soluble dans l'eau.* — On s'en assure en lavant à l'eau des corps solides dont le contact provoque la cristallisation et qui deviennent inactifs, ou en faisant passer à travers une couche d'eau distillée les gaz qui ont cette propriété : c'est ainsi que l'air des habitations, qui fait générale-

(¹) C'est par erreur que, dans mon premier Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 1^{re} série, t. III, p. 206), j'ai indiqué les températures de 77°,2 et 77°,9 comme limites entre lesquelles est comprise celle où les cristaux d'acétate de soude ordinaire deviennent inactifs.

ment cristalliser l'alun, devient inactif lorsqu'il est lavé dans l'appareil décrit dans le tome III des *Annales de l'École Normale*, 1^{re} série, p. 186.

5° *La substance pulvérulente qui fait cristalliser la solution sursaturée perd sa propriété quand elle a séjourné pendant quelque temps dans une atmosphère saturée d'humidité; elle ne la reprend pas dans l'air sec, sauf dans le cas de l'acétate de plomb et de l'alun.* — C'est ce que l'on constate aisément pour le carbonate et l'hyposulfite de soude, l'azotate de chaux et le sulfate de magnésie. Une couche très-mince de ces substances, étalée sur une baguette de verre et qui provoquait la cristallisation, devient inactive lorsqu'elle est restée un jour ou deux dans l'atmosphère humide d'un flacon contenant une couche d'eau : dans cet état, la baguette, placée ensuite dans un autre flacon dont l'air est desséché par l'acide sulfurique, ne redevient pas active, bien qu'elle soit couverte de la poussière sèche de la substance.

Pour ce qui concerne l'acétate de plomb, la poussière n'en devient inactive qu'après un séjour dans une atmosphère saturée d'humidité entre 10 et 20 degrés, prolongé pendant plusieurs jours; mais elle redevient active lorsqu'on l'introduit dans l'air sec.

Dans le cas de l'alun, le séjour dans l'air humide n'enlève pas la propriété de faire cristalliser même après plus d'un mois.

6° *Action de l'alcool sur le corps solide qui fait cristalliser.* — La substance qui fait cristalliser les solutions sursaturées de carbonate et d'hyposulfite de soude, de sulfate de magnésie et d'alun est insoluble dans l'alcool ordinaire, même après plusieurs jours de contact; celle qui produit la cristallisation des solutions d'azotate de chaux et d'acétate de plomb est soluble dans l'alcool.

7° *Identité d'action de la chaleur et des dissolvants sur le corps actif et sur les cristaux dont il provoque la formation.* — Il résulte de ce qui précède que la substance qui provoque la cristallisation des solutions sursaturées est un corps solide soluble dans l'eau, mais que ce corps n'est pas le même pour toutes les solutions; car celui qui agit sur l'azotate de chaux et l'acétate de plomb est soluble dans l'alcool, tandis que celui qui agit sur les autres est insoluble dans ce liquide. De plus ce ne doit pas être le même corps qui agit sur ces diverses solutions, puisqu'il devient inactif à des températures toujours les mêmes pour les

solutions de même nature, mais différentes lorsqu'on passe d'une solution à une autre. Enfin la température à laquelle ce corps inconnu n'a plus d'action sur une solution est précisément celle au-dessus de laquelle il faudrait chauffer les cristaux qui se développeraient dans cette solution pour leur enlever la propriété d'en provoquer la cristallisation subite. Ainsi la substance qui fait cristalliser les solutions sursaturées de carbonate de soude devient inactive entre $36^{\circ},7$ et 37 degrés. Or le sel $\text{NaOCO}^2, 10\text{HO}$, chauffé pendant quelque temps au delà de 37 degrés, se déshydrate partiellement; et, revenu à la température ordinaire, il n'a plus la propriété de provoquer dans les solutions sursaturées la formation des cristaux primitifs.

Nous avons vu aussi que la substance qui fait cristalliser les solutions d'hyposulfite de soude cesse d'agir lorsqu'elle a été portée à une température comprise entre $48^{\circ},9$ et $50^{\circ},3$. Or, si l'on chauffe les cristaux $\text{NaOS}^2\text{O}^2, 5\text{HO}$ à partir de $48^{\circ},9$, ils fondent et donnent, par refroidissement, un liquide surfondu qui ne se solidifie pas spontanément à la température ordinaire et qui n'a pas la propriété de faire cristalliser la solution sursaturée d'hyposulfite de soude.

Il en est de même pour ce qui concerne l'azotate de chaux. Le corps solide qui fait cristalliser les solutions sursaturées de cette substance n'agit plus à partir d'une température comprise entre $41^{\circ},5$ et $42^{\circ},3$. Or le sel cristallisé $\text{CaOAzO}^5, 4\text{HO}$ fond à $41^{\circ},9$, reste à l'état de surfusion lorsqu'on le refroidit et n'a alors aucune action sur la solution sursaturée d'azotate de chaux.

Les solutions sursaturées d'acétate de soude ne donnent pas de cristaux du sel ordinaire au contact de poussières primitivement actives qui ont été chauffées entre $57^{\circ},2$ et $58^{\circ},7$. Or l'acétate de soude $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4, 6\text{HO}$ fond à $58^{\circ},7$ et reste surfondu après refroidissement même jusqu'à zéro, n'ayant plus alors la propriété de provoquer dans les solutions sursaturées la formation des cristaux du sel ordinaire.

En ce qui concerne le sulfate de magnésie, les cristaux $\text{MgOSO}^3, 7\text{HO}$ se déshydratent partiellement à partir de $64^{\circ},3$; ils forment alors un sel qui n'a plus la propriété de produire dans les solutions sursaturées de cette substance des cristaux $\text{MgOSO}^3, 7\text{HO}$.

L'alun se comporte de la même manière : il fond à 91 degrés et se déshydrate lorsqu'on le chauffe au delà de 98 degrés, et le résidu, après

refroidissement jusqu'à la température ordinaire, ne provoque plus la formation des cristaux octaédriques d'alun.

Enfin l'acétate de plomb $C^4H^3PbO^4, 3HO$ donne lieu à des observations analogues : chauffé à $57^{\circ}, 2$, il fond et donne par refroidissement un liquide qui peut se maintenir à l'état de surfusion jusqu'à $26^{\circ}, 7$, mais qui cristallise au-dessous de cette température avec sa forme et sa composition primitives. Il agit alors sur la solution sursaturée comme avant d'avoir été chauffé; mais, si l'on élève sa température à 190 degrés, il se déshydrate, se transforme en acétate de plomb anhydre, dont le point de fusion est vers 198 degrés : il a perdu alors toute action sur la solution sursaturée.

Il y a donc coïncidence entre les diverses températures où la substance primitivement active perd son efficacité et celles où les cristaux, de la nature de ceux que l'on produit dans les solutions sursaturées, se transforment en composés moins hydratés ou bien deviennent liquides s'ils sont susceptibles de rester surfondus à la température ordinaire. On est naturellement, d'après cela, conduit à supposer que le corps susceptible de provoquer la cristallisation d'une solution sursaturée n'est autre chose qu'une parcelle de la nature des cristaux qui se produisent dans la solution. Cette manière de voir est confirmée par la propriété qu'ont un certain nombre de ces substances de devenir inactives dans l'air humide et de ne pas redevenir actives dans l'air sec. En effet, dans une atmosphère saturée d'humidité, elles condensent de la vapeur d'eau qui les dissout, et elles sont alors sans action sur la solution sursaturée; exposées ensuite à l'air sec, elles s'évaporent; mais, au lieu de donner des cristaux identiques à ceux qui prennent naissance lors de la cristallisation subite des solutions sursaturées, elles abandonnent, lorsqu'elles sont à un certain degré de concentration, des cristaux d'un hydrate dont la composition et la forme sont différentes, et qui sont impuissants à provoquer la cristallisation subite des solutions avec production du sel le plus hydraté.

Quant à l'acétate de plomb, après avoir condensé assez de vapeur d'eau pour se dissoudre, il donne, par évaporation dans une atmosphère sèche, une substance active : cela tient à ce que, dans ces circonstances, il reproduit l'hydrate $C^4H^3PbO^4, 3HO$.

Enfin l'alun ne perd pas sa propriété dans l'air humide, par la raison

qu'il ne condense pas assez de vapeur d'eau pour se dissoudre entièrement, même après un séjour de plus d'un mois, à la température ordinaire, dans une atmosphère saturée d'humidité.

8° *Essai de 300 corps solides sur les solutions sursaturées précédentes.*

— Pour qu'on soit en droit d'affirmer qu'il y a identité entre le corps qui détermine la production des cristaux et ces cristaux eux-mêmes, il faut établir qu'aucune autre substance de composition ou de forme différentes ne jouit de la même propriété. Dans le but de rechercher s'il en est ainsi, j'ai essayé sur les solutions sursaturées l'action des 276 produits de laboratoire dont j'avais fait antérieurement l'essai sur les solutions de sulfate et d'acétate de soude et dont j'ai donné la liste dans mon premier Mémoire, et de plus les 24 corps solides suivants, de manière à porter à 300 le nombre des substances différentes employées :

Acide iodique.	Charbon.	Pyrotartrate de plomb.
Acide camphorique.	Cinchonine.	Succinate de fer.
Azotate de magnésie.	Cyanate de potasse.	Succinate de plomb.
Azotate d'urée.	Cyanure de potassium.	Succinate de soude.
Benzoate d'ammoniaque.	Malate de plomb.	Sulfate de quinine.
Benzoate de chaux.	Morphine.	Tartrate de baryte.
Benzoate de fer.	Oxamide.	Tartrate de fer.
Bleu de Prusse.	Perchlorate de potasse.	Tartrate de soude et d'ammoniaque.

Pour effectuer chacun de ces essais, je prélevais quelques parcelles du corps solide au moyen d'un long fil de verre préalablement lavé, conservé à l'abri des poussières du laboratoire et qui ne servait qu'une fois; j'amenais immédiatement l'extrémité du fil dans un tube incliné contenant la solution sursaturée, et je déposais la substance à la surface du liquide. A ce point de l'opération, il se présente une cause d'erreur: si la solution sursaturée a été bouillie dans le tube et abandonnée au refroidissement, la vapeur d'eau condensée sur les parois du tube descend peu à peu jusqu'à la surface libre du liquide et la recouvre d'une couche très-mince d'eau distillée qui ne se mélange que très-lentement avec la solution sous-jacente, de sorte que cette région superficielle ne constitue nullement une solution sursaturée. Alors il peut se produire, au contact d'un corps actif, de deux choses l'une: ou bien ce corps introduit reste dans cette couche non saturée, et il n'y

produit aucun effet, ou bien il descend dans la solution et, comme il s'entoure, en traversant la région superficielle, d'une gaine d'eau distillée, ou d'une solution étendue, il peut rester très-longtemps, vu la lenteur de la diffusion, avant d'être entouré d'une solution sursaturée susceptible de cristalliser. On évite très-facilement ces deux inconvénients en agitant au préalable la solution sursaturée froide de manière à faire disparaître cette couche superficielle.

Voici quel a été le résultat de ces essais sur les diverses solutions :

a. Carbonate de soude. Les seules substances dont le contact a déterminé la cristallisation ont été, outre le carbonate de soude, le borate, l'iodate et le phosphate de soude; mais elles devinrent inactives après avoir été purifiées par une nouvelle cristallisation.

b. Hyposulfite de soude. Ce corps est le seul qui ait fait cristalliser sa solution sursaturée.

c. Sulfate de magnésie. Le carbonate et le phosphate ammoniaco-magnésien sont les seules substances qui, avec les sulfates de la série magnésienne, aient déterminé la cristallisation; mais, après purification, elles sont devenues inactives, et il n'est resté que les sulfates de zinc et de nickel à 7HO isomorphes du sulfate de magnésie, qui aient produit dans la solution sursaturée de cette substance des cristaux $MgOSO^3, 7HO$.

J'ai fait par comparaison l'essai de 60 échantillons prélevés dans les bocaux d'une pharmacie, et j'en ai trouvé 22 qui provoquaient la cristallisation. De ces derniers 14 étaient des produits de laboratoire déjà essayés et trouvés inactifs. Je purifiai ceux qui étaient insolubles par des lavages à l'eau distillée et les autres par une nouvelle cristallisation, et ils devinrent sans action sur la solution sursaturée. Les huit autres étaient des poudres d'iris, de rose, de valériane, d'ipécacuanha, la résine jalap, l'arrow-root, le lupulin. Ces corps lavés, puis séchés sur un filtre à la température ordinaire, perdirent toute action sur la solution sursaturée de sulfate de magnésie: ils la devaient évidemment aux parcelles de cette substance qui avaient été introduites accidentellement dans les bocaux fréquemment ouverts qui contenaient ces diverses poudres.

d. Azotate de chaux. Aucune des 300 substances essayées n'a fait cristalliser cette solution sursaturée, à l'exception d'un cristal d'azotate

de chaux. Les essais sont du reste facilités par cette circonstance que, l'azotate de chaux étant très-hygroscopique, des parcelles de cette substance ne peuvent rester dans l'atmosphère sans condenser la quantité d'eau nécessaire pour les dissoudre et qu'à l'état de dissolution elles peuvent rencontrer la solution sursaturée sans produire aucun effet.

e. Alun. Sur les 300 substances essayées il s'en est trouvé 13 qui ont provoqué la cristallisation de la solution sursaturée d'alun : ce sont les aluns d'ammoniaque, de soude, de thallium, de fer, de chrome, et de plus les produits suivants : sulfates d'alumine, de fer, de mercure, de zinc, sulfate d'ammoniaque et de fer, mannite, bioxyde d'étain, acide tannique. Les deux dernières substances sont insolubles dans l'eau, elles sont devenues inactives après avoir été lavées; j'ai purifié les autres en les dissolvant dans l'eau chaude et laissant cristalliser par refroidissement; puis, pour éviter les poussières de l'air, j'ai prélevé avec une tige de verre très-fine quelques cristaux au sein même du liquide, et je les ai introduits dans une solution sursaturée d'alun qui n'a plus cristallisé. Il n'y a donc que les divers aluns qui produisent la cristallisation de la solution sursaturée d'alun de potasse.

f. Acétate de plomb. La solution sursaturée de cette substance n'a cristallisé qu'au contact de cristaux des acétates de baryte ($C^4H^2BaO^4, 3HO$) et de plomb ($C^4H^2HO^4, 3HO$) qui sont isomorphes. L'acétate de baryte anhydre et le sel à un seul équivalent d'eau étaient, du reste, inactifs.

Ainsi les 1800 essais dont je viens d'indiquer les résultats conduisent, de même que les expériences précédentes, à cette conclusion que *la cristallisation de ces solutions n'est produite que par le contact d'un cristal identique à ceux qui se forment pendant la cristallisation subite ou isomorphe avec eux.*

9° *Présence de l'alun dans l'air.* — Les solutions sursaturées précédentes, à l'exception de celles d'alun, présentent un caractère qui se rencontre aussi dans un certain nombre d'autres : c'est que, si on les expose dans des vases ouverts en des lieux où l'on n'a pas à dessein disséminé des parcelles cristallines, elles se conservent pour ainsi dire indéfiniment sans cristalliser. Ainsi des solutions sursaturées d'hyposulfite de soude et d'azotate de chaux sont restées plus d'un an exposées, dans des ballons dont le col était vertical, aux poussières atmosphériques et ont été

transvasées plusieurs fois à l'air libre sans cesser d'être liquides. Ce qui met un terme à l'expérience, c'est, ou bien que les solutions étant hygrométriques, comme celles d'azotate de chaux, absorbent peu à peu la vapeur d'eau de l'atmosphère et finissent par n'être plus sursaturées, ou bien qu'elles s'évaporent à siccité, comme les solutions de sulfate de magnésie, et qu'elles arrivent par l'évaporation au degré de concentration où la sursaturation cesse d'être possible.

Lorsqu'il s'agit des solutions sursaturées d'alun, au contraire, on constate que, dans les lieux habités, la cristallisation ne tarde pas à se produire dans les mêmes circonstances et avec les mêmes particularités que dans le cas du sulfate de soude, et il est facile de mettre en évidence, par les mêmes expériences que pour le sulfate de soude, la présence de l'alun dans l'air. Ainsi le passage d'un courant d'air dans la solution la fait cristalliser; mais, tandis que dans l'intérieur des habitations il suffit le plus souvent de quelques bulles d'air pour déterminer le phénomène avec le sulfate de soude, il est nécessaire d'employer plusieurs litres d'air dans le cas de l'alun, et il en faut un très-grand nombre si l'on réalise la même expérience à la campagne et en plein air. L'alun se rencontre donc bien moins fréquemment à la campagne que dans les villes. J'ai du reste constaté que, dans un endroit isolé, des ballons ouverts contenant une solution sursaturée d'alun, dont le col était maintenu verticalement, étaient restés sans cristalliser, exposés pendant plus d'un mois aux poussières atmosphériques.

On n'éprouvera aucune difficulté à admettre la présence de l'alun dans l'atmosphère des lieux habités, si l'on réfléchit aux opérations industrielles nombreuses dans lesquelles on emploie cette substance et particulièrement au rôle important qu'elle joue dans la teinture d'un grand nombre de tissus.

Il est, du reste, une particularité propre à l'alun et qui doit retarder l'entraînement de ce corps par les dissolvants : c'est la résistance remarquable qu'il présente aux lavages à l'eau. Ainsi, tandis qu'une baguette de verre couverte de sulfate, d'acétate, de carbonate et d'hyposulfite de soude, de sulfate de magnésie, d'azotate de chaux, d'acétate de plomb, perd en quelques secondes, au contact de l'eau, la propriété de faire cristalliser les solutions sursaturées de ces substances, il faut un temps relativement très-considérable pour enlever l'alun d'une ba-

guette qui en a été imprégnée, et ce n'est qu'après un séjour de plusieurs heures dans l'eau froide ou de quelques minutes dans l'eau bouillante qu'on lui enlève la couche adhérente et invisible qui suffisait pour provoquer la cristallisation de la solution sursaturée. C'est à cause de cette adhérence de l'alun pour les corps solides que l'étude des solutions sursaturées d'alun présente, plus que celle des solutions sursaturées d'autres substances, les résultats les plus discordants aux observateurs inexpérimentés.

10° *Insuffisance d'une action mécanique pour déterminer la solidification.* — Toutes les solutions étudiées plus haut supportent, sans produire les cristaux les plus hydratés, les mouvements vibratoires, les secousses et l'agitation avec des corps solides. On peut même déterminer au sein de ces liquides, comme je l'ai fait voir déjà pour le sulfate de soude, la rupture d'une larme batavique sans provoquer la cristallisation ; on n'obtient pas plus d'effet lorsqu'on produit en un point du liquide un choc très-violent, par exemple en mettant quelques gouttes de la solution sursaturée sur une enclume et la frappant violemment avec une pointe d'acier très-aiguë. Les actions mécaniques sont donc insuffisantes pour provoquer le dépôt des cristaux les plus hydratés, même lorsqu'on opère dans le voisinage de la température qui est la limite inférieure de la sursaturation. Mais il peut se faire, comme nous le verrons plus loin, qu'une action mécanique produise avec les mêmes substances, au sein de solutions concentrées, un dépôt cristallin ; dans ce cas, les cristaux obtenus sont moins hydratés et le liquide sursaturé se trouve, par rapport à ces nouveaux hydrates, dans les conditions qui caractérisent une seconde classe de solutions sursaturées dont je vais indiquer les principales propriétés.

II. — Expériences sur les solutions sursaturées analogues aux corps surfondus.

1° *Caractère distinctif de ces solutions.* — Dans une Note relative aux phénomènes de surfusion (1), j'ai démontré que les liquides surfondus,

(1) *Comptes rendus*, t. LXIII, p. 843; 12 novembre 1866.

considérés entre des limites déterminées de température, ne peuvent se solidifier que de deux manières : 1° par le contact d'une parcelle identique au corps solidifié et dans le même état que lui, ou isomorphe rigoureusement. C'est ainsi que le phosphore surfondu ne se solidifie pas au contact du phosphore rouge; 2° par une action mécanique telle que le frottement de deux corps solides au sein du liquide : ainsi le frottement d'une tige de verre contre la paroi d'un tube contenant du phosphore surfondu fait naître au point frotté une parcelle solide et la solidification se propage en un clin d'œil dans toute la masse liquide.

Cette dernière propriété distingue nettement les corps surfondus des solutions sursaturées que j'ai étudiées ci-dessus, lesquelles résistent aux actions mécaniques les plus violentes. L'examen d'autres substances m'a conduit à reconnaître qu'il en est un certain nombre qui se comportent comme les corps susceptibles de surfusion; je signalerai spécialement, lorsque l'on opère aux températures supérieures à 15 ou 20 degrés, l'azotite de potasse, l'azotate d'ammoniaque, l'arséniate d'ammoniaque, le biacétate de potasse, le borate d'ammoniaque, le bromure et le chlorure de calcium, le protochlorure de fer, le chlorure de magnésium, l'hydrate de chloral, le phosphate d'ammoniaque et le phosphate de soude. On peut facilement mettre en évidence cette propriété en versant sur une lame de verre une solution convenablement sursaturée de chlorure de calcium à la température ambiante, de manière à couvrir la lame d'une couche de liquide; on frotte ensuite avec une tige de laiton la lame de verre, et le lieu des points frottés se couvre aussitôt d'une trainée de cristaux qui s'allongent ensuite de manière à envahir la totalité du liquide.

La nature de l'action mécanique qui détermine la cristallisation paraît analogue à celle qui produit le dégagement des bulles de gaz des solutions gazeuses sursaturées et que j'ai étudiées dans un Mémoire précédent. On constate facilement ses effets à la condition d'éliminer l'influence des parcelles de même nature que la substance dissoute dont le contact suffit pour déterminer la cristallisation, en opérant, par exemple, sur des dissolutions de substances hygrométriques, telles que le bromure et le chlorure de calcium, etc. J'ai reconnu que, toutes choses égales d'ailleurs, l'efficacité de cette action est d'autant plus

grande que la solution est plus sursaturée; ainsi, lorsqu'elle est très-concentrée, il suffit du plus léger frottement pour amener la cristallisation, tandis que, dans les solutions faiblement sursaturées, des frictions répétées et bien plus vives sont quelquefois sans efficacité. De plus, dans une même solution, la manière de produire l'action mécanique a une grande influence sur le résultat; ainsi, tandis qu'une pression très-énergique sera sans effet, un frottement de la nature de ceux qui mettent les corps en vibration produira immédiatement la cristallisation. Enfin la nature des corps frottants n'est pas indifférente; on constate, en effet, dans le cas des solutions sursaturées de chlorure de calcium, que le frottement d'une pointe de diamant, qui coupe le verre, est moins efficace que celui d'une tige de laiton, qui ne raye pas cette substance.

Ces résultats permettent de comprendre comment il arrive que l'on détermine la précipitation de certains composés cristallins, en l'absence de germes de même forme, non pas, comme on le croit communément, par l'agitation du liquide, mais par le frottement au sein de la solution actuellement sursaturée de deux corps solides l'un sur l'autre, par exemple d'une baguette de verre contre les parois du vase qui contient le liquide.

2° *Étude des solutions sursaturées de biacétate de potasse et de phosphate de soude, analogues aux corps surfondus.* — Les propriétés de ces solutions sursaturées présentent les plus grandes analogies avec celles des solutions précédemment étudiées, comme cela résulte de l'étude des solutions de biacétate de potasse et de phosphate de soude, que j'ai soumises à toutes les expériences qui avaient été réalisées sur les solutions de la première classe. J'ai reconnu que, indépendamment de l'action mécanique, elles cristallisent sous l'influence d'un corps solide soluble dans l'eau, soluble dans l'alcool pour ce qui concerne les solutions de biacétate de potasse, insoluble dans ce liquide lorsqu'on opère sur les solutions de phosphate de soude, perdant cette propriété au delà de 275 degrés dans le cas du biacétate de potasse et entre 36 et 38°,8 dans celui du phosphate de soude. Or on sait que ces deux corps sont solubles dans l'eau, que le biacétate de potasse est soluble dans l'alcool, qui ne dissout pas le phosphate de soude; de plus, on reconnaît que le biacétate de potasse chauffé en vase fermé à une

température qui n'est pas inférieure à 275 degrés et le phosphate de soude qui a été chauffé entre 36 et 38°, 8 perdent la propriété de faire cristalliser leurs solutions sursaturées respectives ; on est ainsi conduit à admettre que la cristallisation subite de ces deux solutions sursaturées doit être attribuée au contact de parcelles solides de ces deux substances, et cette conclusion se trouve confirmée par l'essai de divers produits sur ces solutions. J'ai, en effet, touché la solution sursaturée de biacétate de potasse avec les trois cents substances qui avaient servi à l'étude des solutions précédentes, et une seule, autre que le biacétate de potasse, a provoqué la cristallisation : l'acétate neutre de potasse. Mais, en purifiant cette substance, et la faisant cristalliser d'une solution concentrée, et prélevant les cristaux au sein du liquide, je les ai trouvés inactifs.

Les mêmes substances, essayées sur la solution sursaturée de phosphate de soude, m'ont donné les résultats suivants : onze firent cristalliser la solution ; une seule, insoluble dans l'eau, le chromate d'argent, devint inactive après lavage à l'eau chaude ; les dix autres étaient :

Phosphate ammoniaco-sodique,	Hyposulfite de soude,
» de fer,	Sulfate de cuivre,
» de magnésie,	Acétate de strontiane,
Pyrophosphate de soude,	Benzoate de soude,
Tartrate d'antimoine et d'ammoniaque,	Acide pyrogallique.

Purifiées par cristallisation dans l'eau distillée, elles perdirent absolument toute action sur la solution sursaturée.

Ainsi les solutions sursaturées de biacétate de potasse et de phosphate de soude se comportent comme les autres, à la réserve de l'influence qu'exerce sur elles une action mécanique.

Nous indiquerons plus loin les particularités que présentent les solutions sursaturées de cette espèce lorsqu'on les amène à être extrêmement concentrées.

TROISIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SOLUTIONS SURSATURÉES.

I. — Dégagement de chaleur par la cristallisation.

Le dégagement de chaleur qui accompagne toujours la solidification des corps se manifeste avec une intensité remarquable lorsqu'on fait cristalliser certaines substances dont les chaleurs de fusion et de diffusion sont considérables. On peut le mettre en évidence par quelques expériences de cours; je citerai, par exemple, la suivante : on se sert d'un ballon de verre d'un demi-litre de capacité, qu'on remplit aux deux tiers d'hyposulfite de soude cristallisé, auquel on ajoute une très-petite quantité d'eau; on fait fondre le sel en promenant le liquide sur les parois du ballon, de manière à n'y laisser aucune parcelle saline à l'état solide. On chauffe le liquide vers 100 degrés et, au moment où on le retire du feu, on y introduit un long tube de verre mince de 8 à 10 millimètres de diamètre, fermé à son extrémité inférieure et fixé dans le bouchon qui ferme le col du ballon. Ce même bouchon est également traversé par un fil métallique dont l'extrémité inférieure est immergée dans le liquide. L'appareil, abandonné à lui-même, se refroidit très-lentement; aussi est-il nécessaire de préparer l'expérience plusieurs heures avant de déterminer la cristallisation. Le liquide étant revenu à la température ordinaire, on verse de l'éther dans le tube jusqu'à ce que son niveau dépasse de quelques millimètres le niveau de la solution. On retire alors le fil métallique, on touche avec son extrémité un cristal d'hyposulfite de soude ordinaire et on le remet en place. Sitôt que la solution est touchée par l'extrémité du fil, la cristallisation se produit et se propage jusqu'à solidification complète du liquide; en même temps, le tube reçoit assez de chaleur pour que l'éther soit amené à l'ébullition. Alors il peut arriver, si le tube a été convenablement lavé au préalable, qu'il y ait un retard de l'ébullition et qu'on n'observe aucune bulle dans la masse liquide; on fait cesser ce retard en y laissant tomber un fragment d'un corps poreux, tel que du bioxyde de manganèse ou de la mousse

de platine, qui amène l'atmosphère gazeuse nécessaire pour provoquer l'ébullition : il se produit alors une projection d'une partie du liquide et le reste bout d'une manière très-apparente et en donnant assez de vapeur d'éther pour qu'on puisse l'enflammer à l'orifice du tube. Il est clair que, si l'on a introduit d'avance le bioxyde de manganèse dans le tube, il n'y a pas de retard de l'ébullition, et ce phénomène présente la plus parfaite régularité.

On peut aussi manifester l'élévation de température par un phénomène de fusion : il suffit pour cela de remplacer l'éther par des cristaux d'acide phénique, qui fondent à 37 degrés s'ils ne contiennent pas d'eau, et à une température plus basse s'ils en contiennent une quantité même très-petite.

Dans cette expérience, si la solution est préparée comme je l'ai indiqué, la température peut s'élever de 9 degrés jusqu'au delà de 48 degrés, et, comme la masse cristalline conduit très-mal la chaleur, un thermomètre introduit au centre du ballon ne baisse qu'avec beaucoup de lenteur.

Cette élévation de température est, du reste, d'autant moindre que la solution est plus étendue. Elle est naturellement très-variable avec la nature de la substance dissoute.

II. — Rapidité de la cristallisation.

On sait que la cristallisation, une fois commencée, envahit peu à peu toute la masse liquide. Cette masse étant homogène, le développement des cristaux s'effectuerait avec une vitesse uniforme dans toutes les directions sans les perturbations apportées au phénomène par le dégagement de chaleur. En réalité, les cristaux grandissent inégalement vite dans des directions différentes. On conçoit en effet que, si la cristallisation se propage d'un point du liquide vers un autre situé plus bas, les cristaux qui se produisent de haut en bas échauffent le milieu environnant; mais le liquide sous-jacent n'éprouve qu'une variation de température extrêmement faible, par suite de la mauvaise conductibilité du liquide : les cristaux s'allongent donc dans une solution qui s'échauffe, mais ils pénètrent dans une solution froide, et par suite leur allongement n'est pas beaucoup ralenti. Au contraire, lorsque la cristal-

lisation se propage de bas en haut, la solution s'échauffe au contact des cristaux, s'élève à travers le liquide supérieur qui s'échauffe en même temps : il en résulte que la cristallisation doit être notablement ralentie, car les cristaux s'avancent vers un liquide plus chaud que dans le cas précédent, même en supposant, bien entendu, que le mouvement ascendant du liquide n'ait pas troublé le phénomène en entraînant des cristaux détachés de la masse principale. Il résulte de là que, si l'on provoque la cristallisation au centre d'une masse liquide, elle se propagera plus vite de haut en bas que de bas en haut, de sorte que, si le liquide est immobile, le lieu des points où aboutiront au même instant les extrémités cristallines formera autour de la verticale un solide de révolution dont la section sera une courbe allongée vers le bas et aplatie vers le haut, et cette forme devra être d'autant plus prononcée que la cristallisation sera plus avancée. On peut suivre les particularités de ce phénomène de la manière suivante : on remplit un grand ballon, jusqu'à la naissance du col, d'une solution sursaturée chaude d'hyposulfite de soude, d'azotate de chaux, etc. ; on y introduit un tube capillaire à parois épaisses ouvert aux deux bouts et retenu par le bouchon du ballon, suivant l'axe du col maintenu verticalement, et on l'enfonce jusqu'à ce que son extrémité arrive au centre du ballon : le liquide s'élève dans ce tube et l'on abandonne le tout au refroidissement. La solution étant à la température ambiante, on provoque la cristallisation dans le tube capillaire en y introduisant une parcelle cristalline à l'extrémité d'un fil très-fin. La cristallisation se propage dans le tube, arrive à son extrémité, envahit alors le liquide du ballon à partir du centre et l'on voit se développer une masse cristalline qui présente les apparences indiquées plus haut, avec une déformation qui tient à la réfraction de la lumière par le liquide du ballon (1)

(1) On peut observer, dans l'exécution de cette expérience avec l'hyposulfite de soude, un résultat remarquable si l'on a effilé l'extrémité du tube en un conduit très-capillaire. Dans ce cas, il n'arrive par son orifice inférieur qu'un seul cristal dans la masse liquide et il y grossit à vue d'œil de manière à prendre des dimensions énormes qui ne sont limitées que par les parois du ballon. On constate facilement, pendant l'accroissement rapide de ce cristal, que ses diverses parties ne grandissent pas de manière à donner un solide semblable à lui-même ; les arêtes du cristal se forment d'abord et ce n'est qu'ultérieurement que des faces planes viennent les relier les unes aux autres.

Il résulte de là que, pour étudier la vitesse de cristallisation des solutions sursaturées, il faut les renfermer dans des tubes étroits, mauvais conducteurs de la chaleur, et déterminer le phénomène à partir du haut. On trouve ainsi :

1° Que, pour des solutions identiques, la vitesse avec laquelle se propage la cristallisation augmente à mesure que la température extérieure est plus basse; 2° que pour des solutions de même nature, mais de concentration différente, cette vitesse augmente avec la concentration; 3° enfin les solutions différentes ont sous ce rapport un coefficient spécial.

Il est clair que si, au lieu de maintenir le liquide immobile, on lui communique un mouvement quelconque, on disséminera dans toute la masse les cristaux déjà formés, et le phénomène de la cristallisation se trouvera souvent considérablement accéléré : c'est ainsi, par exemple, qu'une solution sursaturée concentrée d'alun, d'hyposulfite de soude ou d'acétate de soude se solidifie presque entièrement pendant le temps très-court employé à communiquer au liquide un mouvement de gyration, de sorte qu'on peut immédiatement retourner le vase qui le contient sans qu'il tombe une goutte de liquide.

Un effet de ce genre se produit spontanément dans les solutions assez fluides pour que les mouvements des couches liquides, échauffées autour d'un cristal en voie de formation, ne soient pas gênés : ces couches plus légères, poussées de bas en haut, entraînent des parcelles cristallisées qui propagent en chemin la cristallisation.

Dans les liquides très-visqueux, au contraire, les choses se passent autrement, et la cristallisation est quelquefois si lente qu'il faut plusieurs jours pour que la couche cristalline ait quelques centimètres d'épaisseur. Il est facile de se rendre compte de cette particularité : considérons un germe cristallin introduit en un point de la masse liquide : il grossit immédiatement aux dépens de la couche qui l'entoure et qui abandonne à l'état solide une certaine quantité de la matière dissoute, jusqu'à ce que cette couche ne soit plus sursaturée à la température qui résulte du dégagement de la chaleur de fusion et de diffusion. Il s'établit donc une sorte d'équilibre transitoire, et l'accroissement des cristaux ne devient possible qu'à la condition qu'il y ait ou abaissement de la température ou renouvellement du liquide autour du noyau

solidifié. Or le liquide est mauvais conducteur de la chaleur : ce n'est donc que très-lentement que la couche ambiante peut perdre de la chaleur, et d'un autre côté, cette couche appauvrie et échauffée ne peut, à cause de la viscosité du liquide, s'élever facilement à travers la masse pour être remplacée par une autre plus riche et plus froide. Il résulte de là que l'accroissement des cristaux n'aura lieu que par le fait du refroidissement de la masse liquide ambiante et par suite d'un échange du solide dissous qui s'effectuera, sous l'influence d'un phénomène de diffusion, entre la couche liquide chaude et le milieu sursaturé qui l'environne. Mais la propagation du corps dissous par diffusion est extrêmement lente (1); aussi les cristaux ne peuvent-ils s'accroître que très-lentement. C'est ce qu'on observe, par exemple, dans les solutions concentrées de sucre, d'acide citrique, etc. On se trouve, du reste, alors dans les conditions les plus favorables pour obtenir des cristaux très-limpides et très-nets, qui ont à la longue des dimensions considérables; car la substance dissoute se porte, en se séparant de la solution, sur le cristal déjà formé.

On peut artificiellement provoquer les mêmes résultats dans les solutions qui ne sont pas assez visqueuses pour les produire naturellement : il suffit d'introduire dans la solution des corps solides inertes qui empêchent le mélange des couches liquides, dans lesquelles la cristallisation produit des variations locales de température qui détermineraient des courants au sein de la solution.

On s'explique de la même manière la production de cristaux très-volumineux dans des liquides où se trouvent disséminées des quantités plus ou moins grandes de matières solides.

Du reste, tous ces effets disparaissent si l'on agite le liquide au contact de germes cristallins et l'on obtient, en quelques minutes, dans une solution sursaturée de sucre par exemple, la séparation de presque tout l'excédant de matière dissoute qui, abandonnée à elle-même, aurait mis plusieurs jours à se déposer.

(1) J'ai reconnu qu'il peut s'écouler *plusieurs mois* avant que, dans certaines solutions visqueuses surmontées d'une couche d'eau distillée, la substance dissoute ait cheminé par diffusion à travers une couche d'eau de quelques centimètres de hauteur, la température ambiante étant maintenue constante.

III. — Effets des variations de température sur les solutions sursaturées.**A. — PRODUCTION DE SELS MOINS HYDRATÉS.**

Lorsqu'on fait subir à la plupart des solutions sursaturées concentrées un abaissement de température suffisant, elles abandonnent des cristaux transparents qui, le plus souvent, se déposent aussi rapidement que ceux qui se produisent pendant la cristallisation subite des solutions sursaturées ordinaires. Cette circonstance a fréquemment occasionné des méprises; car, pour n'avoir pas déterminé avec assez d'exactitude le degré de concentration des solutions sur lesquelles ils opéraient, certains observateurs ont cru reconnaître et ont annoncé d'une manière générale la production spontanée et rapide de cristaux, dans des solutions sursaturées qui en réalité n'abandonnent jamais spontanément que des cristaux d'un autre hydrate, à la condition toutefois que ces solutions sursaturées aient été amenées à un degré de concentration très-avancé. Dans ce cas, les cristaux déposés sont baignés par un liquide assez riche encore en matière saline pour former une solution sursaturée, et ils sont constitués par un sel moins hydraté que celui qui résulte de la cristallisation du liquide restant.

Un grand nombre de solutions sursaturées très-concentrées se comportent de cette manière; mais la détermination du degré d'hydratation des cristaux qui se déposent au sein de solutions restant sursaturées présente quelques difficultés, car ces cristaux sont imprégnés d'une quantité relativement considérable d'eau mère, qui est une solution concentrée du sel employé. Or, sitôt qu'on expose ces cristaux à l'air libre, sans prendre de précautions minutieuses pour les garantir du contact des parcelles cristallines du sel le plus hydraté, que l'on a disséminées dans le laboratoire, le liquide dont ils sont imprégnés cristallise et l'on n'a plus qu'un mélange de l'hydrate initial avec l'hydrate ordinaire qui vient de se produire. Si l'on analyse ce mélange cristallin, on trouve naturellement qu'il contient d'autant plus d'eau qu'il restait plus d'eau mère interposée. Il est donc indispensable d'empêcher la cristallisation de l'eau mère au moment où l'on cherche à

l'éliminer. A cet effet, voici comment on peut procéder : on prépare le ballon dans lequel on produit les cristaux dont il s'agit, on le lave extérieurement pour enlever les parcelles cristallines qui pourraient s'y trouver et on le transporte humide dans un endroit éloigné du laboratoire. Quand l'hydrate est déposé, on décante le liquide et l'on fait ensuite passer les cristaux avec l'eau mère dont ils sont imprégnés entre des doubles de papier buvard que l'on a chauffés préalablement à une température supérieure à celle où le sel devient anhydre, afin d'éliminer l'influence d'une parcelle active qui s'y trouverait. Les feuilles de papier doivent être assez abondantes pour que le liquide soit absorbé avant d'arriver aux feuilles extérieures ; on soumet alors le tout à la presse, et l'on obtient ainsi une masse que l'on soumet à une nouvelle compression entre de nouveaux papiers : elle ne contient plus alors que des traces d'eaux mères. Si l'on négligeait les précautions indiquées, le liquide expulsé cristalliserait subitement, et la cristallisation se propagerait dans la masse non encore comprimée et qui ne serait alors qu'un mélange en proportions variables de deux hydrates différents.

La plupart des hydrates qui se déposent dans les solutions sursaturées concentrées n'avaient pas été signalés ou bien avaient été considérés comme étant le sel anhydre. J'en citerai quelques exemples choisis parmi les sels dont les solutions ont été étudiées dans ce Mémoire.

1° *Acétate de soude*. — Lorsqu'on met dans un ballon de verre des cristaux d'acétate de soude ordinaire, $C^4H^3NaO^4 + 6HO$, additionnés de quelques gouttes d'eau, et qu'on les chauffe de manière à les fondre, puis à amener le liquide à l'ébullition et à chasser une certaine partie de l'eau de cristallisation, si l'on abandonne le ballon au refroidissement en préservant le liquide qu'il contient contre la chute de parcelles d'acétate de soude, il se dépose des cristaux feutrés qui peu à peu finissent par envahir la totalité de la masse liquide, laquelle paraît alors complètement solidifiée si l'on a poussé la concentration assez loin. En réalité, il reste entre ces aiguilles cristallines une certaine quantité d'un liquide visqueux constituant une solution sursaturée et qui est naturellement d'autant plus abondante que la concentration a été poussée moins loin. Vient-on à toucher ce liquide avec une parcelle d'acétate de soude à $6HO$, immédiatement le liquide cristallise avec dégagement de chaleur et peu à peu la cristallisation s'avance jusqu'à

la masse de cristaux précédemment déposés, qui de translucide devient d'un blanc opaque. On peut réaliser avec un ballon plein de cette substance les mêmes expériences que j'ai indiquées avec une solution sursaturée d'hyposulfite de soude, c'est-à-dire fondre de l'acide phénique et faire bouillir de l'éther, puisque la température peut monter de $16^{\circ},5$ à $57^{\circ},5$, et l'expérience présente un intérêt de plus, car le dégagement de chaleur se produit au sein d'une masse qui paraît déjà complètement solidifiée. En réalité, les cristaux de l'hydrate déposé, bien qu'occupant tout le volume de la solution, n'en constituent qu'une partie, qui n'est le plus souvent en poids que le $\frac{1}{3}$ de la masse totale. Leur composition, déterminée avec les précautions que j'ai rappelées plus haut, correspond à la formule $C^4H^3NaO^4, 3HO$, avec une erreur qui ne dépasse pas $\frac{1}{160}$ de la quantité d'eau mesurée. Si la solution est moins concentrée, il peut se faire que les cristaux à $3HO$ ne se déposent pas spontanément de la solution sursaturée. C'est ce qui arrive, par exemple, à une température inférieure à 16 degrés pour une solution formée de cristaux d'acétate de soude dissous dans moins de $\frac{1}{10}$ de leur poids d'eau; dans ce cas, en y introduisant un cristal de cet hydrate, on peut faire naître une certaine quantité de ces cristaux dans un liquide assez riche en acétate de soude pour constituer une solution sursaturée capable de donner, au contact d'un cristal de l'hydrate ordinaire, une abondante cristallisation d'acétate de soude à $6HO$.

On produit donc à volonté dans le même liquide et à la même température des cristaux de l'un ou l'autre des deux hydrates. Si l'on introduit dans le même liquide des cristaux d'acétate de soude anhydre, ils ne produisent d'abord aucun effet; mais peu à peu ils s'hydratent en donnant le sel à $3HO$, qui finit par envahir tout le liquide.

2° *Carbonate de soude*. — Si l'on additionne de quelques gouttes d'eau des cristaux de carbonate de soude, $NaOCO^2, 10HO$, et qu'on chauffe à l'ébullition, puis qu'on laisse refroidir, on observe que, pendant le refroidissement à une température supérieure à 10 degrés, il se dépose très-lentement des aiguilles cristallines sur les grains de carbonate anhydre restés dans le liquide. Si l'on a mis assez d'eau ou chauffé assez lentement pour ne pas laisser un excès de sel anhydre, le liquide reste sursaturé; mais on peut y faire naître les mêmes cristaux que précédemment, en prélevant avec une baguette quelques-uns de ces cristaux et

les semant dans la solution. Leur développement est toujours lent, et, lorsqu'il a cessé, ils se trouvent baignés dans l'un et l'autre cas par un liquide que l'on peut encore considérer comme une solution sursaturée par rapport à l'hydrate à 10HO. Vient-on, en effet, à semer dans ce liquide un cristal de cet hydrate, il s'y développe très-rapidement et toute la masse devient solide, en même temps que le dépôt précédent devient plus blanc. Ce dépôt est constitué par des cristaux dont la composition correspond à la formule $\text{NaOCO}^2, 7\text{HO}$. Ils ont été signalés pour la première fois et étudiés avec soin par Lœwel (¹).

3° *Azotate de chaux*. — On réalise avec cette substance des expériences analogues aux précédentes : à cet effet, on met dans un ballon de verre des cristaux de l'azotate de chaux ordinaire $\text{CaOAzO}^2, 4\text{HO}$, on chauffe le sel qui entre en fusion, et l'on amène le liquide à l'ébullition. On continue à chauffer jusqu'à ce qu'on ait chassé une faible partie de l'eau de cristallisation, puis on abandonne le ballon au refroidissement. Le liquide constitue alors une solution sursaturée très-concentrée, dans laquelle il naît spontanément des cristaux si la température descend dans le voisinage de la température de fusion de la glace. Si la température ambiante n'est pas assez basse pour que ces cristaux prennent naissance spontanément, la solution peut être cependant amenée à rester liquide, bien qu'elle contienne assez peu d'eau pour pouvoir être considérée comme sursaturée par rapport au sel le moins hydraté : dans ce cas, comme pour les solutions d'acétate et de carbonate de soude, on fait naître cet hydrate en introduisant dans la solution un cristal d'une opération antérieure; la cristallisation est alors très-rapide si la solution est froide et très-concentrée; elle est, au contraire, lente si l'on introduit le cristal dans la solution lorsqu'elle est encore assez chaude pour n'être pas sursaturée. Les cristaux qui se déposent dans ces circonstances sont baignés d'une eau mère dans laquelle on peut faire naître des cristaux de l'hydrate $\text{CaOAzO}^2, 4\text{HO}$. Après les avoir débarrassés de cette eau mère, ce qui est relativement facile, à cause de la fusibilité de l'hydrate ordinaire, qui se liquéfie à 41°,9, j'ai trouvé que leur composition correspond à la formule $\text{CaOAzO}^2, 3\text{HO}$, à $\frac{1}{500}$ près de la quantité d'eau déterminée. Ces cris-

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXXIII, p. 334.

taux sont les mêmes que ceux qui ont été signalés par Millon (1), qui les obtenait par évaporation d'une solution concentrée dans le vide sec, et auxquels il avait attribué une composition un peu différente et des propriétés particulières : la moyenne de quatre déterminations, différant de $\frac{1}{60}$, conduisait, en effet, à la formule $\text{CaO AzO}^5 + 3,5 \text{HO}$, avec un écart de $\frac{1}{40}$ en moins. Ce résultat s'explique par les particularités signalées par Millon lui-même. Il avait, en effet, observé que les cristaux exposés à l'air s'hydratent « aux dépens même de l'eau d'hydratation qu'ils contiennent », et qu'il en est de même, à plus forte raison, si l'on essaye de les laver ; ils donnent, dans ce cas, l'azotate ordinaire à 4HO , et cette hydratation est accompagnée d'une élévation notable de température. En réalité, le phénomène qui se produit quand ces cristaux sont exposés, non pas à l'air libre, mais au contact de parcelles de l'hydrate ordinaire, n'est pas la fixation d'une certaine quantité d'eau, mais la cristallisation de l'eau mère interposée, qui constitue une solution sursaturée capable, en se solidifiant, de dégager une grande quantité de chaleur. Si l'on n'a pas pris les précautions que j'ai indiquées pour éliminer cette eau mère, et que l'on détermine le degré d'hydratation des cristaux qui en sont imprégnés, on trouve, comme cela est arrivé à Millon, une composition intermédiaire entre celle des cristaux ordinaires à 4HO et celle de l'hydrate précédemment déposé à 3HO , composition qui le plus souvent diffère peu de la moyenne $3,5\text{HO}$. On ne peut donc pas légitimement, d'après cela, s'autoriser de la production de cet azotate de chaux hydraté pour confirmer l'hypothèse de l'existence d'un acide azotique dont la composition serait $\text{AzO}^5 + 4,5\text{HO}$, capable de donner avec la chaux $\text{AzO}^5 + \text{CaO} + 3,5\text{HO}$, puisque le sel hydraté n'a pas, en réalité, la composition supposée par Millon.

4° *Hyposulfite de soude*. — Cette substance est une de celles qui se prêtent le plus facilement au dépôt d'un sel moins hydraté que le sel ordinaire. On introduit dans un ballon des cristaux $\text{NaOS}^2\text{O}^2, 5\text{HO}$ et l'on chauffe, après avoir mouillé les cristaux de quelques gouttes d'eau pour éviter une action trop brusque du foyer, qui les décomposerait aux points de contact avec le ballon. On les fond, on amène le liquide à l'ébullition et l'on chasse l'eau ajoutée et une quantité d'eau d'hydrata-

(1) *Recherches sur l'acide nitrique* (Ann. de Chimie et de Physique, 3^e série, t. VI, p. 90).

tion plus ou moins grande. Si l'on en a peu chassé, le liquide, abandonné au refroidissement à la température ordinaire, ne donne pas de cristaux spontanément; si, au contraire, on a poussé l'ébullition jusqu'à l'apparition d'une pellicule solide à la surface, il se produit, pendant le refroidissement, des cristaux particuliers. Quelques-uns de ces cristaux, introduits dans le liquide précédent, y font naître des cristaux semblables, qui peuvent, si la concentration est convenable, envahir toute la masse liquide, laquelle paraîtra entièrement cristallisée. En réalité, dans l'un et l'autre cas, ces cristaux emprisonnent une quantité considérable d'une solution sursaturée capable de donner des cristaux ordinaires à 5HO, sitôt qu'ils en auront été touchés, et de dégager une quantité considérable de chaleur, comme j'ai eu occasion de l'indiquer antérieurement. On peut donc répéter avec l'hyposulfite de soude les mêmes expériences qu'avec l'acétate de soude. Si la solution est de l'hyposulfite de soude ordinaire fondu et amené à la température de 5 à 15 degrés, on produit à volonté des cristaux de l'un ou de l'autre des deux hydrates en y introduisant une parcelle de ces cristaux; et, dans le cas où l'on a semé d'abord le sel moins hydraté et qu'on l'a laissé se déposer complètement, si l'on sème ensuite le sel ordinaire, on observe un dégagement intense de chaleur dans un milieu qui est en apparence déjà solidifié. Il arrive souvent alors, si le ballon contient une grande quantité de matière, occupant plus de la moitié de sa capacité, par exemple, qu'au moment où la solidification est complète, l'expansion de la masse, que l'on a fait cristalliser à partir de la surface, provoque la rupture du ballon. Pour ce qui est des cristaux déposés dans les solutions très-concentrées, j'ai déterminé leur composition et trouvé qu'elle est représentée par la formule $\text{NaOS}^2\text{O}^2, 2\text{HO}$.

Le sulfate de magnésie, en solution concentrée, abandonne, par le refroidissement, des cristaux dont la composition, connue depuis longtemps, est représentée par la formule $\text{MgOSO}^3, 6\text{HO}$.

L'alun de potasse donne lieu à des dépôts analogues. J'ai reconnu qu'il en est de même de l'alun d'ammoniaque, de l'alun de thallium, du chlorure de manganèse, de l'arséniate de soude, de l'acétate de baryte, etc.

Parmi les sels dont les solutions sursaturées cristallisent sous l'influence d'une action mécanique, je signalerai le chlorure de calcium, dont les cristaux $\text{CaCl}, 6\text{HO}$, chauffés au delà de leur point de fusion,

refroidis à la température ordinaire, abandonnent, comme l'a indiqué pour la première fois M. E. Lefèvre⁽¹⁾, des cristaux dont la formule est $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

B. — CHANGEMENT PRODUIT DANS LES HYDRATES DÉPOSÉS AU SEIN DES SOLUTIONS SURSATURÉES CONCENTRÉES PAR LA CRISTALLISATION DU LIQUIDE AMBIANT.

Dans le cas que nous venons d'envisager, où les solutions sursaturées concentrées abandonnent des cristaux d'un sel moins hydraté que le sel ordinaire en laissant un liquide sursaturé par rapport au sel le plus hydraté, on peut, lorsque la chaleur dégagée par la solidification du premier hydrate s'est dissipée, déterminer la cristallisation de l'autre hydrate, dans la solution ambiante, par le contact d'une parcelle de même composition que cet hydrate. La solution se prend en masse comme à l'ordinaire et en même temps les cristaux de l'autre hydrate, précédemment déposés, deviennent peu à peu blancs et opaques.

J'ai depuis longtemps expliqué ce phénomène en faisant remarquer que les cristaux qui se déposent dans une solution qui reste sursaturée sont toujours plus ou moins imprégnés de ce liquide; il en résulte qu'au moment où cette solution produit, en se solidifiant, des cristaux de composition, de forme et, par suite, d'indice de réfraction différents des premiers, ces cristaux, en même temps qu'ils envahissent le liquide, se développent entre les assises cristallines de l'autre hydrate et les rendent d'autant plus opaques et blancs que la différence entre les indices de réfraction des deux substances est plus grande.

C'est à tort que l'on a quelquefois attribué cette transformation à une action mécanique, telle qu'un choc plus ou moins violent; car ces diverses solutions peuvent être agitées très-vivement avec des fragments de verre ou de corps quelconques et frottées avec des tiges métalliques ou autres, sans que le changement dont il s'agit ait jamais lieu: les cristaux conservent toujours leur aspect primitif.

(¹) *Sur la sursaturation du chlorure de calcium* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 684; 1871). Le travail de M. E. Lefèvre n'est sans doute pas parvenu à la connaissance d'un savant autrichien, M. H.-H. Hammerle, qui a récemment annoncé la découverte du même hydrate dans les *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Academie der Wissenschaften in Wien*; 1875, juillet, nov. et déc., p. 287 et 667.

Il n'est pas plus exact de supposer que ce changement d'aspect provienne d'une modification isomérique provoquée par le dégagement de chaleur qui accompagne la cristallisation de la solution sursaturée. Si le phénomène dont il s'agit était un effet d'une élévation de température, il serait possible de le produire en chauffant directement les cristaux déposés, et alors on observerait qu'ils commencent par blanchir graduellement et n'éprouvent qu'ultérieurement la fusion ignée. Or il n'en est pas ainsi, par exemple, avec l'azotate de chaux $\text{CaOAzO}^5, 4\text{HO}$. Une solution très-concentrée de cette substance dépose, comme nous l'avons vu, à la température de 10 à 15 degrés, des cristaux $\text{CaOAzO}^5, 3\text{HO}$, moins hydratés, au sein d'un liquide que l'on fait cristalliser par le contact d'une parcelle de $\text{CaOAzO}^5, 4\text{HO}$. Sitôt que ces nouveaux cristaux touchent les anciens, ceux-ci commencent à devenir opaques, et une sorte de tache blanche, née au point touché en premier lieu, s'étend bientôt dans toute la masse. Si l'on chauffe, au contraire, ces cristaux $\text{CaOAzO}^5, 3\text{HO}$ avant d'avoir provoqué la cristallisation du liquide qui les baigne, ils entrent immédiatement en fusion et ne présentent en aucune façon les apparences précédentes. Il en est de même si, après avoir provoqué la formation de l'hydrate à 4HO dans l'eau mère et avoir observé que les cristaux à 3HO qui en sont entourés commencent à devenir opaques, on chauffe la région où le phénomène s'est produit : non-seulement les cristaux qui subissent l'action de la chaleur ne blanchissent pas, mais toute la région chauffée entre peu à peu en fusion, et aussitôt l'opacité cesse de se propager et les cristaux non chauffés restent indéfiniment translucides. Le même phénomène se présente avec les solutions sursaturées d'acétate de soude, que l'on peut utiliser pour vérifier facilement les assertions précédentes. A cet effet, on chauffe dans un ballon de l'acétate de soude cristallisé ordinaire $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4, 6\text{HO}$ jusqu'à ce qu'il soit fondu, et l'on chasse un peu d'eau en maintenant l'action du foyer, puis on laisse refroidir. Nous avons vu que pendant le refroidissement, à l'abri des poussières d'acétate de soude, que l'on arrête en couvrant l'orifice du ballon d'un capuchon de papier, il se produit, au sein du liquide, une masse cristalline translucide de l'hydrate $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4, 3\text{HO}$, qui en occupe tout le volume et qui est formée d'aiguilles entrelacées plus ou moins espacées, suivant le degré de

concentration du liquide primitif. Ces cristaux peuvent être agités, frottés, écrasés même contre les parois du ballon avec une tige de fer sans qu'il en résulte le moindre changement dans leur aspect. Si l'on chauffe fortement un point de la masse, les cristaux ne blanchissent pas, ils repassent à l'état liquide : d'où il résulte qu'une action mécanique ou l'influence de la chaleur ne produit aucune transformation particulière de ces cristaux. Vient-on au contraire, après avoir amené le liquide qui les baigne vers le col du ballon pour le mouiller, à le toucher avec un cristal d'acétate de soude ordinaire, aussitôt la cristallisation s'étend à partir du point de contact, le long de la paroi jusqu'au liquide, et, au bout de quelque temps, les cristaux précédemment déposés deviennent peu à peu d'un blanc mat, qui indique la pénétration graduelle des cristaux d'acétate de soude ordinaire à l'intérieur des cristaux précédemment déposés. Il ne peut être question d'un changement isomérique dans ce cas, malgré les assertions qu'on trouve dans les Traités de Chimie les plus récents, puisque la composition des cristaux déposés primitivement correspond à la formule $C^4H^3NaO^4, 3HO$, tandis que les cristaux dont on provoque la formation ont pour composition $C^4H^3NaO^4, 6HO$. Du reste, ici encore on arrête la transformation en chauffant la région occupée par les cristaux de l'hydrate ordinaire de manière à les fondre.

On peut réaliser les mêmes expériences avec les cristaux qui se déposent dans la solution sursaturée très-concentrée d'alun.

Ce qui a pu donner l'idée d'attribuer à une action calorifique le changement d'aspect du sel, c'est ce qui arrive avec les cristaux de sulfate de soude $7HO$, qu'une faible élévation de température au delà de 33 degrés transforme au sein même du liquide en sel anhydre blanc. Mais, même dans le cas du sulfate de soude, ce n'est pas l'élévation de la température qui détermine le phénomène ; en effet, la solidification de la solution sursaturée n'amène jamais la température au delà de 33 degrés et l'expérience prouve que, dans le cas où l'on veut provoquer par la chaleur la transformation des cristaux à $7HO$ transparents en cristaux blancs, on n'arrive à aucun résultat si l'on ne dépasse pas cette température ; au contraire, on dissout les cristaux déposés si on les chauffe suffisamment, tout en maintenant la température au dessous de 33 degrés.

C. — CRISTALLISATION SUBITE DES SOLUTIONS SURSATURÉES PAR REFOUDDISSEMENT.

1° *Limite inférieure de la sursaturation des solutions concentrées.* —

Quand on refroidit *lentement* une solution sursaturée, on peut l'amener à un degré de concentration tel que, si un sel moins hydraté que le sel ordinaire est possible, il se produise. Avant qu'il se dépose, il pourra arriver, si l'on évite, par exemple, la présence de sel anhydre, que la solution soit sursaturée plus ou moins par rapport à cet hydrate et donne lieu à une précipitation abondante, au sein d'une eau mère qui constitue une solution sursaturée du sel le plus hydraté. Cette eau mère, soumise à un refroidissement suffisant, donne des cristaux du sel ordinaire.

Si, au contraire, on refroidit *brusquement* la solution, il arrive que, le dépôt du sel le moins hydraté étant toujours très-lent, l'eau mère qui l'entoure et le reste du liquide où il ne s'est encore rien produit soient assez refroidis pour donner en un point un cristal du sel le plus hydraté, lequel se développant très-rapidement a bientôt envahi toute la masse liquide. La température à laquelle se manifeste dans ce cas la cristallisation subite du sel le plus hydraté est toujours supérieure à celle où le même hydrate prend naissance dans les solutions lentement refroidies; car la solution est relativement beaucoup plus concentrée par rapport à cet hydrate que l'eau mère qui entoure les cristaux du sel moins hydraté déposé pendant le refroidissement lent.

Du reste, cette température à laquelle se produit la cristallisation subite des solutions sursaturées varie beaucoup avec les conditions de l'expérience, comme Lœwel l'avait observé dans le cas des solutions de carbonate et de sulfate de soude et comme M. de Coppet l'a constaté pour les solutions sursaturées de sulfate de soude.

Cette température est d'ailleurs très-différente pour les diverses substances; ainsi, tandis que certaines solutions, telles que celles d'acétate de soude, contenant 2 de sel pour 1 d'eau, peuvent descendre au-dessous de — 20 degrés sans se prendre en masse, les solutions sursaturées d'alun cristallisent à des températures un peu inférieures ou un peu supérieures à zéro suivant la concentration et les solutions concentrées d'acétate de plomb vers 15 degrés. Pour un certain nombre de solutions,

la sursaturation cesse d'exister à une température plus élevée, de sorte qu'on ne peut l'observer qu'à la condition de maintenir la température ambiante au delà de cette limite.

On peut mettre ces particularités en évidence par quelques expériences de cours : on introduit, par exemple, une solution sursaturée d'acétate de plomb dans un ballon de verre que l'on ferme pour empêcher le contact des poussières, et la solution reste liquide si sa température est supérieure à 15 degrés. Veut-on déterminer la cristallisation du sel, on touche un point du ballon avec un morceau de glace : on voit naître aussitôt, à l'intérieur et en regard du point touché, un cristal qui provoque la cristallisation dans toute la masse liquide. De même, si l'on renferme une solution sursaturée d'alun dans un tube que l'on a effilé à sa partie inférieure et qu'on plonge cette pointe dans quelques gouttes d'un mélange réfrigérant obtenu par la dissolution de l'azotate d'ammoniaque dans l'eau, on y provoque la cristallisation de l'alun qui envahit bientôt tout le reste de la solution, bien qu'elle n'ait pas été directement refroidie.

2° *Production de glace par refroidissement de solutions sursaturées peu concentrées.* — Nous venons de voir que les solutions sursaturées concentrées, convenablement refroidies, abandonnent pour la plupart des cristaux d'un sel moins hydraté au sein d'une eau mère sursaturée par rapport à l'hydrate ordinaire. Lorsqu'on opère sur des solutions des mêmes substances peu concentrées, bien que sursaturées à la température ordinaire, il peut arriver que, par un refroidissement suffisant, on les amène à un degré de concentration de même ordre que celui auquel se trouvaient les solutions concentrées, lorsqu'elles ont abandonné des cristaux du sel moins hydraté; dans ce cas elles abandonnent généralement les cristaux de cet hydrate : c'est ce qu'on observe, par exemple, lorsqu'on refroidit à des températures supérieures à -16 degrés des solutions d'azotate de chaux ou d'hyposulfite de soude saturées à 20 degrés. Pour d'autres solutions, telles que celles d'acétate de soude, contenant 2 parties de sel à 6HO pour 1 partie d'eau, il n'y a pas production de sel à 3HO, même lorsqu'on abaisse jusqu'à -20 degrés la température de la solution. En général, dans le cas où le sel est peu soluble à froid, un abaissement de température même considérable est insuffisant pour amener la solution au degré de concentration néces-

saire pour le dépôt du sel moins hydraté, et alors on n'en observe plus la production ; mais un autre phénomène peut se manifester, la séparation de cristaux de glace dans toute la masse liquide. Cette cristallisation de l'eau dans des solutions sursaturées a été signalée depuis longtemps par Lœwel, qui l'avait observée fortuitement dans certaines solutions de sulfate de soude ou d'alun. On peut la produire à volonté dans les solutions d'alun de la manière suivante : on fait une solution saturée d'alun, à 20 degrés, par exemple, et on la chauffe dans un tube un peu au delà, pour dissoudre les parcelles d'alun, qui, pendant le refroidissement, provoqueraient la cristallisation, et, après avoir bouché le tube, on l'introduit dans un mélange réfrigérant à -10 degrés, par exemple : on constate qu'aux points les plus refroidis il se produit des cristaux qui envahissent toute la masse liquide assez vite pour qu'elle semble complètement solidifiée. Ils sont formés par des aiguilles de glace entre lesquelles se trouve retenue la solution sursaturée d'alun. Vient-on à retirer le tube du mélange et à l'amener à une température à peine supérieure à celle de la glace fondante, on voit peu à peu disparaître les cristaux déposés, et la solution redevient complètement limpide. Au contraire, pendant qu'il est dans le mélange réfrigérant, si l'on touche les cristaux avec une parcelle d'alun, l'eau mère interposée cristallise peu à peu, et la masse blanchit de proche en proche si la solution n'est pas trop étendue. Lorsqu'on retire le tube du mélange réfrigérant, on reconnaît que les cristaux primitifs disparaissent à zéro, mais que ceux d'alun persistent. L'expérience réussit parfaitement avec une solution d'un alun quelconque. Avec l'alun de chrome, une solution saturée à froid ou de 30 à 40 degrés est colorée en violet très-peu verdâtre et faiblement teintée si on l'observe dans un tube très-plat. Dans un mélange réfrigérant, le liquide se remplit d'aiguilles blanches, et, si l'on sème alors un cristal d'un alun quelconque, on voit se développer des cristaux manifestement octaédriques qui grandissent lentement et sont d'autant plus abondants que la solution était plus riche en alun ; ils ont une teinte légèrement rosée, qui tranche nettement sur le fond un peu verdâtre, et ils persistent au delà de zéro lorsque les aiguilles de glace ont disparu.

On peut observer des effets analogues avec les solutions de sulfate de soude, mais il faut qu'elles aient été débarrassées par filtration des par-

celles de sulfate anhydre qu'elles pourraient contenir et qui, par un refroidissement qui concentrerait suffisamment la solution, détermineraient la formation de l'hydrate à 7HO. Il faut aussi, dans ce cas, que le refroidissement ne soit pas trop brusque, sinon on obtiendrait immédiatement la cristallisation subite de la solution sursaturée avec formation de cristaux à 10HO. L'expérience réussit très-bien avec une solution saturée à 15 ou 20 degrés. Refroidie à -10 degrés, elle abandonne des aiguilles de glace, fusibles vers la température de la glace fondante. Ces cristaux sont translucides et développés dans tout le liquide; vient-on à les toucher avec une parcelle de sulfate de soude, l'eau mère dont ils sont imprégnés donne des cristaux de sulfate de soude à 10HO, qui rayonnent à partir du point touché et rendent opaque la masse cristalline précédemment déposée.

Il est facile d'observer des phénomènes analogues avec les autres solutions sursaturées, mais il faut pour cela qu'elles présentent un degré de concentration convenable. On peut s'assurer qu'une solution est assez diluée pour donner de la glace par refroidissement en l'amenant à la température où l'on veut opérer et en y introduisant une parcelle de glace. Si la solution est trop concentrée, la glace ne provoque en aucune manière la production d'aiguilles de glace; il y a plus, elle entre en fusion. C'est ce qui arrive pour les solutions d'acétate de soude concentrées contenant, par exemple, 2 parties de sel pour 1 partie d'eau et même celles plus étendues qui ont été saturées à 20 degrés; car ces solutions, mises à -10 degrés au contact d'un morceau de glace, l'amènent à l'état liquide. Il n'en est plus de même si l'on dilue la solution: l'immersion de la glace provoque à la même température la formation d'aiguilles de glace.

Dans les solutions d'hyposulfite de soude, on constate des phénomènes analogues à -10 degrés; les solutions, même peu concentrées, fondent la glace introduite; diluées elles donnent des aiguilles de glace.

Mais toutes les solutions ne se prêtent pas aussi facilement à la congélation d'une partie de l'eau qu'elles contiennent; ainsi, pour les solutions d'azotate de chaux, l'action de la solution sur la glace dégage assez de chaleur pour la fondre, même si la solution est étendue et la température ambiante de -10 degrés.

Les solutions dans lesquelles l'immersion d'un morceau de glace

produit au-dessous de zéro la formation de la glace peuvent donner lieu, par le refroidissement, à la solidification de la plus grande partie de l'eau qu'elles contiennent, et nous venons de voir qu'on peut à volonté produire le phénomène par une dilution convenable du liquide.

IV. — Effet d'une action mécanique sur les solutions sursaturées concentrées.

Nous avons vu précédemment que les solutions sursaturées très-concentrées laissent déposer spontanément, lorsque la concentration atteint une certaine limite, des cristaux d'un sel moins hydraté que le sel ordinaire.

Si l'on ne pousse pas la concentration aussi loin, il arrive, pour un grand nombre de sels, que la solution soit sursaturée même par rapport à cet hydrate et l'on s'en assure en y introduisant une parcelle cristalline du sel moins hydraté, qui se développe seul en quantité d'autant plus abondante que la concentration a été poussée plus loin.

Supposons que dans une solution de ce genre on introduise une tige rigide et qu'on s'en serve pour exercer un frottement un peu vif contre les parois du vase baignées par le liquide, il pourra se faire qu'on détermine la production de cristaux. Cette action mécanique ne fait pas naître ces cristaux dès qu'ils sont possibles : j'ai reconnu que des solutions assez concentrées pour abandonner le sel moins hydraté au contact d'un germe cristallin de même forme résistent aux frottements les plus énergiques lorsque la sursaturation n'est pas très-avancée, tandis qu'un frottement relativement modéré détermine d'autant plus facilement la cristallisation que la concentration du liquide est plus voisine du maximum.

En étudiant la manière dont se comportent les diverses solutions concentrées susceptibles de déposer plusieurs hydrates différents au contact de germes cristallins et qui donnent des cristaux sous l'influence d'une action mécanique, j'ai reconnu que les phénomènes peuvent se rattacher aux trois cas suivants :

1° Il se produit des cristaux du sel le moins hydraté : c'est le cas bien connu présenté par le sulfate de soude dont les solutions sursaturées, limpides et très-concentrées, abandonnent par frottement au-dessous de

8 degrés une abondante cristallisation de l'hydrate à 7HO. Le chromate de soude se comporte de la même manière et ses solutions très-concentrées donnent par frottement, à une température voisine de zéro, des cristaux de l'hydrate à 4HO.

Je dois signaler une cause d'erreur qu'il convient d'éliminer dans l'étude de ce phénomène : il est nécessaire d'opérer sur des solutions limpides n'ayant pas de dépôt de sel anhydre. En effet, le sel anhydre peut, le plus souvent, dans les solutions très-concentrées, faire naître peu à peu des cristaux du sel le moins hydraté, qui grandissent lentement dans un liquide en repos, et si, en frottant une tige rigide sur les parois du vase, on touche ces cristaux, on les dissémine dans toute la masse liquide qui est sursaturée, et l'on provoque ainsi une cristallisation plus rapide, qu'on attribuerait à tort au frottement.

2° Le deuxième cas est celui où il se produit des cristaux du sel le plus hydraté, bien que l'on puisse par le contact d'un cristal faire naître dans la même solution le sel le moins hydraté.

Ce cas se présente, par exemple, avec l'acétate de soude. Pour l'observer, on introduit dans un tube fermé à un bout des cristaux d'acétate de soude ordinaire à 6HO; on chauffe jusqu'à l'ébullition pour éliminer une petite quantité d'eau, puis on refroidit après avoir bouché le tube et on l'agite de temps en temps pour empêcher la formation, par refroidissement superficiel, des cristaux de l'hydrate à 3HO. On obtient ainsi un liquide qui peut être facilement amené à la température de la glace fondante sans cristalliser. Dans ces conditions, il peut donner, sous l'influence d'un germe cristallin, l'un ou l'autre des deux hydrates, et par un refroidissement rapide il produirait spontanément l'hydrate à 3HO; mais vient-on à y introduire une tige rigide, puis à exercer un léger frottement contre les parois, on détermine immédiatement la solidification sur la ligne des points frottés avec d'autant plus de facilité que la concentration du liquide est plus grande. Les cristaux ainsi formés sont ceux de l'acétate de soude ordinaire à 6HO et l'on voit que dans ce cas le liquide se comporte comme si les cristaux d'acétate ordinaire étaient à l'état de surfusion.

3° Le troisième cas, qui est peut-être le plus curieux, est celui que j'ai observé dans les solutions concentrées de chlorure de calcium, qui peuvent donner par frottement d'abord le sel le moins hydraté, puis le

sel le plus hydraté. Voici comment on peut obtenir ce résultat : on fond dans un tube fermé à une extrémité des cristaux de chlorure de calcium à 6HO et l'on amène le liquide à l'ébullition pour chasser une petite quantité d'eau. On bouche l'orifice du tube et on laisse refroidir lentement le liquide en l'agitant de temps en temps pour éviter la production spontanée de cristaux à 4HO qui se formeraient par évaporation à sa surface. On amène ainsi la solution à 15 degrés et, après avoir constaté qu'elle est bien limpide, on y introduit une tige rigide, une longue aiguille d'acier par exemple; on en frotte très-légèrement la pointe sur un point de la paroi baignée par le liquide et l'on voit naître aussitôt des cristaux de chlorure de calcium à 4HO, qui se développent peu à peu avec dégagement de chaleur et envahissent tout le liquide sous forme de longues aiguilles feutrées. On attend que la masse ait repris la température ambiante de 15 degrés et l'on obtient plus rapidement ce résultat en laissant séjourner le tube dans un bain d'eau à cette température. On frotte alors de nouveau un peu vivement le fond du tube en déplaçant l'aiguille, et il se produit immédiatement, le long des points frottés, des cristaux qui grandissent plus vite que les précédents, en dégageant une nouvelle quantité de chaleur, et solidifient bientôt la presque totalité du liquide. C'est le chlorure de calcium à 6HO qui se forme ainsi après l'autre hydrate si la première action mécanique a été très-faible; mais, dans le cas où l'on exerce dès le début une friction énergique, on n'observe que le second phénomène, car les cristaux à 6HO, se développant beaucoup plus rapidement et en plus grande abondance que les autres, masqueraient évidemment leur formation dans le cas où ils auraient commencé à se développer.

V. — Hydrates obtenus par l'évaporation des solutions.

Lorsqu'on abandonne à elle-même, dans une atmosphère sèche et à une température constante, une solution plus ou moins étendue, elle se concentre par évaporation, peut devenir sursaturée, et, lorsqu'elle a atteint un degré suffisant de concentration, elle abandonne des cristaux qui diffèrent par leur composition et leur forme des cristaux ordinaires, mais qui sont le plus souvent identiques à ceux que l'on obtient par un

refroidissement des solutions sursaturées suffisant pour les amener à une concentration égale à celle qui est produite par l'évaporation.

C'est ainsi que la solution de sulfate de soude abandonne, à la température ordinaire, dans l'air sec, des cristaux $\text{NaOSO}^3, 7\text{HO}$; celle de chromate de soude, l'hydrate $\text{NaOCrO}^3, 4\text{HO}$; celle d'hyposulfite de soude, l'hydrate $\text{NaOS}^2\text{O}^2, 2\text{HO}$; celle d'acétate de soude, l'hydrate $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4, 3\text{HO}$; celle d'azotate de chaux, l'hydrate $\text{CaOAzO}^3, 3\text{HO}$; celle de chlorure de calcium, l'hydrate $\text{CaCl}, 4\text{HO}$, etc.

On voit ainsi que, dans ces diverses solutions, les hydrates qui se produisent *spontanément* par évaporation à la température ordinaire des solutions d'une concentration quelconque sont précisément ceux qui se déposent par refroidissement dans les solutions sursaturées très-concentrées : ils sont formés par les hydrates les moins riches en eau. Les cristaux les plus hydratés, au contraire, ne se produisent jamais *spontanément* dans ces solutions, et on ne les obtient par refroidissement des solutions sursaturées qu'autant qu'elles sont soumises à des températures notablement inférieures à celles qui déterminent le dépôt des cristaux les moins hydratés.

Ce résultat me conduit à discuter la valeur d'un passage de l'article HYDRATE du *Dictionnaire de Chimie* (1), qui a été rédigé d'après un Mémoire de M. Lecoq de Boisbaudran (2) et qui est ainsi conçu :

« Les divers hydrates d'un même sel peuvent cristalliser à la même température, d'une dissolution sursaturée, lorsqu'on y introduit un cristal de l'hydrate que l'on veut obtenir, ou bien un hydrate isomorphe. *Les cristaux obtenus ainsi ne sont stables que quand ils appartiennent à l'hydrate qui cristallise spontanément des solutions à la température donnée. Les cristaux des autres hydrates se détruisent plus ou moins rapidement surtout au contact du précédent.* »

Relativement à ces dernières assertions, je ferai les remarques suivantes :

1° Pour les sels que j'ai étudiés jusqu'ici, et notamment pour les sulfate, chromate, hyposulfite, acétate de soude, l'azotate de chaux et le

(1) WURTZ, *Dictionnaire de Chimie*, t. II, p. 59.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 4^e série, t. XVIII, p. 246.

chlorure de calcium, les cristaux des deux hydrates différents que l'on fait naître dans les solutions de ces sels sont *stables* aux températures où on les produit, c'est-à-dire qu'ils persistent indéfiniment dans les liquides où ils ont pris naissance, sans éprouver aucun changement appréciable de constitution.

2° Lorsqu'on observe une modification dans l'aspect d'un des hydrates déposés, déterminée par le contact des cristaux de l'autre hydrate, ce changement, qui a été considéré comme une destruction, sous cette influence, des cristaux préexistants, n'est autre chose que la cristallisation de la solution sursaturée qui baigne les cristaux déjà déposés⁽¹⁾; ces cristaux pouvant, d'ailleurs, être assez abondants ou assez feutrés pour occuper, en apparence, la totalité de la masse saline et ne changeant d'aspect que par la cristallisation de l'eau mère interposée. Il est du reste impossible que, des divers hydrates d'un même sel, le moins hydraté puisse se transformer en un sel plus hydraté sans addition d'eau. Or nous avons vu que les liquides obtenus en fondant les cristaux de l'hyposulfite de soude à 5HO et de l'acétate de soude à 6HO, par exemple, et chassant une partie de l'eau, abandonnent des cristaux des hydrates $\text{NaOS}^2\text{O}^2 \cdot 2\text{HO}$, et $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4 \cdot 3\text{HO}$, baignés d'une solution où l'on peut faire naître des cristaux ordinaires, qui ne peuvent évidemment déterminer la transformation de la totalité des cristaux précédents, puisque la quantité d'eau est insuffisante.

Les expériences suivantes résolvent très-nettement la question, en ce qui concerne le chromate de soude : j'ai indiqué précédemment qu'en fondant le chromate de soude à 10HO, amenant le liquide à l'ébullition et le filtrant à chaud, on obtient une solution concentrée qui donne des cristaux de l'hydrate à 4HO dans une eau mère où l'on peut faire naître des cristaux à 10HO qui se développent dans le liquide, en même temps que les cristaux primitifs deviennent opaques et d'un jaune plus clair. Le sel à 4HO n'est fusible qu'à 60 degrés, tandis que l'hydrate à 10HO fond à 23 degrés.

Supposons que, dans une solution sursaturée concentrée, on ait fait naître successivement les deux espèces de cristaux à une température ambiante de 6 degrés par exemple, et qu'on attende, un temps plus ou

(¹) Voir page 49.

moins long, que la transformation supposée de l'hydrate à 4HO en hydrate à 10HO soit complète: s'il y a eu réellement transformation, les cristaux primitifs ont dû perdre leur forme et leurs propriétés. Or il est un moyen sûr de le reconnaître: il suffit de chauffer la masse cristalline au delà de 23 degrés: si elle est entièrement transformée en sel à 10HO, elle deviendra liquide. L'expérience conduit à un résultat tout autre: non-seulement il n'y a pas fusion complète, mais on remarque, à mesure qu'on élève la température jusqu'à 23 degrés, que les cristaux à 10HO, produits en dernier lieu, disparaissent seuls pendant que les cristaux à 4HO, qui étaient opacifiés, redeviennent peu à peu transparents, diminuent de volume en se dissolvant partiellement tant que la température s'élève; mais ces cristaux persistent lorsqu'elle a dépassé 23 degrés. Après avoir maintenu quelque temps la température stationnaire au delà de 23 degrés, si l'on refroidit la solution, on reconnaît que les cristaux à 4HO, restés seuls, reprennent peu à peu leurs dimensions primitives en conservant leur transparence et que l'eau mère ambiante redevient sursaturée par rapport à l'hydrate à 10HO que l'on y fait naître de nouveau, si on la touche avec un cristal de cet hydrate. On s'assure du reste que les cristaux qui restaient dans la dissolution après l'élévation de la température ne contiennent plus trace de sel à 10HO, en les introduisant dans une solution sursaturée de sulfate de soude, dont ils ne provoquent pas la cristallisation ni au-dessous ni au-dessus de 23 degrés, tandis que la moindre parcelle de l'hydrate à 10HO déterminerait la prise en masse de cette solution. J'ai recherché de plus si la transformation de l'hydrate à 4HO en sel à 10HO, qui ne se produit pas au bout de peu de temps, comme l'indiquent les expériences précédentes, n'exigerait pas, pour être manifeste, un contact longtemps continué; à cet effet, j'ai disposé cinq tubes contenant des solutions de chromate de soude de concentrations différentes et j'y ai fait naître successivement les deux hydrates, que j'ai abandonnés pendant un mois à des températures qui ont varié de 8 à 15 degrés. Je les ai ensuite portés à des températures supérieures à 23 degrés, que j'ai même élevées jusqu'à 33 degrés; dans chacun des tubes les dépôts de l'hydrate à 10HO ont disparu et les cristaux à 4HO ont diminué en se dissolvant dans le liquide ambiant; mais, après le refroidissement, ils ont occupé dans le tube le même volume qu'aupa-

ravant, au sein d'une eau mère sursaturée par rapport au sel à 10HO. Du reste, ils n'avaient aucune action sur les solutions sursaturées de sulfate de soude.

On peut donc conclure de ces expériences que, même après un contact d'un mois, les cristaux à 4HO ne sont pas détruits par l'hydrate à 10HO, qui ne fait que se développer entre leurs assises cristallines, et ils ne prennent pas la composition de cet hydrate.

On arrive aux mêmes résultats par l'étude des solutions des sels dont les cristaux les moins hydratés peuvent éprouver sans décomposition la fusion aqueuse: je citerai, par exemple, les solutions d'azotate de chaux qui abandonnent l'hydrate à 3HO dans une solution qui est sursaturée par rapport au sel ordinaire à 4HO. Lorsqu'on fait cristalliser cette eau mère, les cristaux primitifs deviennent opalins: vient-on à élever la température au delà de 42 degrés, point de fusion du sel à 4HO, on voit disparaître les cristaux de ce sel; et, si l'on maintient quelque temps la température constante, pour faire disparaître les dernières traces de cet hydrate, puis qu'on l'abaisse de manière à la ramener au degré initial, on reconnaît que les cristaux à 3HO persistent seuls dans un liquide sursaturé par rapport à l'autre sel à 4HO: il en résulte évidemment que les cristaux à 3HO n'ont été ni détruits ni transformés en l'autre hydrate.

3° Enfin cette prétendue transformation se produit au contact non pas de l'hydrate qui cristallise spontanément des solutions à la température donnée, mais de l'autre hydrate. En effet, j'ai montré que les hydrates qui se produisent spontanément sont les moins riches en eau: tels sont le sulfate de soude à 7HO, le chromate de soude à 4HO, l'hyposulfite de soude à 2HO, etc.; or, si ces hydrates étaient mis au contact de cristaux plus hydratés, ils ne pourraient leur enlever de l'eau ni en provoquer la transformation.

En résumé, les divers hydrates d'un même sel sont stables à la température où on les fait naître; ils ne se transforment pas l'un dans l'autre, mais l'eau mère interposée entre les cristaux les moins hydratés peut cristalliser au contact d'un cristal des autres hydrates; enfin les cristaux produits spontanément sont précisément ceux qui subissent la transformation apparente et non ceux qui la provoquent.

Nous avons vu que l'évaporation, à la température ordinaire des

solutions de concentration quelconque en l'absence de germes cristallins d'autres hydrates, produit des cristaux du sel le moins hydraté : examinons ce qui se passe si l'on prolonge l'exposition de ces cristaux dans l'air entretenu à l'état sec par de l'acide sulfurique.

Le plus souvent les cristaux déposés s'effleurissent à la surface, comme les autres sels plus hydratés, et perdent ainsi quelquefois avec une grande rapidité la presque totalité de l'eau dite *de cristallisation*, en prenant l'apparence d'une poudre blanche : tel est le cas du sulfate de soude $\text{NaOSO}^3 \cdot 7\text{HO}$, du carbonate de soude $\text{NaOCO}^2 \cdot 7\text{HO}$, de l'azotate de chaux $\text{CaOAzO}^5 \cdot 3\text{HO}$.

D'autres fois l'efflorescence est tellement lente qu'on ne l'observe pas même après plusieurs jours ; dans ce cas, on l'active beaucoup en exposant les cristaux dans le vide sec. On peut procéder de la manière suivante : on met quelques cristaux de l'hydrate dans un petit tube fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, puis on l'introduit dans un autre tube plus large et plus long au fond duquel on a versé de l'acide sulfurique ; on étire ce dernier tube à la lampe en ménageant un renflement à l'aide duquel on ajuste ce tube au caoutchouc d'une pompe à mercure. On fait alors le vide aussi loin que possible et l'on scelle le tube à la lampe. La vapeur d'eau émise par l'hydrate est absorbée peu à peu par l'acide sulfurique, et au bout de quelques heures à la température ordinaire, on voit blanchir la surface des cristaux les plus élevés : on constate ainsi facilement l'efflorescence des cristaux de chromate de soude à 4HO , d'hyposulfite de soude à 2HO , d'acétate de soude à 3HO , de chlorure de calcium à 4HO , etc. (1).

Il est enfin des hydrates dont la tension de dissociation est si faible, qu'on ne réussit pas à en constater l'efflorescence, même après plusieurs jours, avec l'appareil dont je viens de parler : c'est ce qui arrive, par exemple, pour les cristaux de borax $\text{NaO}, 2\text{BoO}^3, 5\text{HO}$ dits *octaédriques* et qui sont réellement rhomboédriques (2). Les cristaux de ce sel obtenus par évaporation lente de la solution sont transparents et ne paraissent

(1) On peut mettre facilement en évidence, par cette disposition expérimentale très-simple, l'efflorescence des sels réputés les plus déliquescents, tels que l'azotate de chaux à 4HO , le chlorure de calcium à 6HO , dont les cristaux blanchissent dans le vide sec au bout de quelques heures et finissent par se déshydrater comme les autres sels.

(2) *Poggendorff's Annalen*, t. CLVIII, p. 250.

pas modifiés lorsqu'ils ont été abandonnés plusieurs jours dans une atmosphère sèche où la pression de l'air restant n'était qu'une fraction de millimètre.

VI. — Influence nulle de la substance dissoute, soit à l'état de dissolution, soit à l'état d'hydrate différent, soit à l'état anhydre.

Les solutions sursaturées des substances précédemment étudiées restent inaltérées, comme celles de sulfate de soude : 1° lorsqu'on les touche avec des solutions de même nature non sursaturées; 2° lorsqu'on les met en contact avec les cristaux d'un autre hydrate du même sel, ou du sel anhydre, à la condition toutefois qu'elles ne soient pas trop concentrées; car il peut arriver qu'à un degré suffisant de concentration elles se comportent comme de véritables solutions sursaturées par rapport à cet hydrate et qu'elles donnent des cristaux de la nature du sel qui les a touchées: c'est ce qu'on observe non-seulement avec les solutions de sulfate de soude, mais aussi avec celles de chromate de soude, d'hyposulfite de soude, d'azotate de chaux, d'acétate de soude, dont les solutions concentrées peuvent abandonner ainsi les cristaux des hydrates $\text{NaOSO}_3 \cdot 7\text{HO}$, $\text{NaOCrO}_3 \cdot 4\text{HO}$, $\text{NaOS}^2\text{O}^2 \cdot 2\text{HO}$, $\text{CaOAzO}^3 \cdot 3\text{HO}$, $\text{C}^4\text{H}^3\text{NaO}^4 \cdot 3\text{HO}$.

Quant aux sels anhydres, ils n'ont pas non plus d'action sur les solutions relativement étendues.

A la rigueur, il n'y aurait pas besoin d'expériences directes pour démontrer qu'il en est ainsi; car : 1° dans la préparation des solutions sursaturées amenées à l'ébullition, il se condense toujours sur les parois des vases des gouttes d'eau, qui, en venant au contact de la solution, passent successivement par tous les degrés de concentration sans provoquer de cristallisation; 2° si les hydrates inférieurs n'étaient pas inactifs, ils ne pourraient se développer au sein même des solutions sans faire cesser la sursaturation; 3° on observe dans un certain nombre de solutions amenées à l'ébullition un dépôt de sel anhydre qui ne gêne en aucune manière la sursaturation. Mais, dans ce dernier cas, si la solution est susceptible de déposer deux espèces de cristaux d'hydratation différente, la présence du sel anhydre pourra empêcher la solution concentrée de rester sursaturée par rapport au sel le moins hydraté.

C'est ce qui arrive, par exemple, pour les solutions très-concentrées de sulfate de soude, dans lesquelles l'introduction du sel anhydre à une température inférieure à 8 degrés, pour les solutions contenant 2 parties de sel pour 1 partie d'eau, détermine peu à peu la formation de l'hydrate à 7HO; on voit en effet, comme je l'ai fait remarquer antérieurement, le fragment de sel anhydre introduit se couvrir peu à peu de cristaux à 7HO, qui grandissent lentement dans la solution sursaturée par rapport à cet hydrate et dont on peut activer le développement en agitant le liquide, ce qui dissémine dans toute la masse les petits cristaux qui grossissent alors très-rapidement.

Ce phénomène paraît être assez général: on l'observe en effet dans les solutions très-concentrées d'acétate de soude où l'acétate fondu se recouvre peu à peu de cristaux d'acétate à 3HO; et aussi dans celles de carbonate de soude obtenues en préparant une solution de ce sel saturée à l'ébullition et évaporée avant qu'il se sépare des cristaux dans le liquide bouillant; on abandonne ce liquide à une température comprise entre zéro et 10 degrés et l'on a une solution dans laquelle un fragment de carbonate de soude anhydre fondu se couvre peu à peu de l'hydrate à 7HO, que l'on peut ainsi produire à volonté.

VII. — Action des sels effleuris sur les solutions sursaturées.

Lorsqu'on abandonne dans une atmosphère sèche, par exemple sous une cloche contenant de l'acide sulfurique, des cristaux d'un hydrate déterminé, ils abandonnent l'eau dite *de cristallisation* avec d'autant plus de rapidité que la tension de dissociation du sel à la température de l'expérience est plus forte et que l'air est plus raréfié. Après quelques jours, dans un certain nombre de cas, la quantité d'eau retenue par le sel n'est plus appréciable à la balance; on pourrait donc, en se fondant sur l'analyse du résidu, le considérer comme formé de sel anhydre: en réalité, il agit autrement que le sel anhydre sur les solutions sursaturées.

Par exemple, le sulfate de soude à 10HO effleuri, mis au contact d'une solution sursaturée, y provoque immédiatement la formation de cristaux à 10HO, identiques à ceux d'où il provient. Au contraire, la poussière de l'hydrate à 7HO, effleuri de manière à ne retenir qu'une

quantité d'eau d'un poids insensible, donne immédiatement dans les solutions convenablement concentrées de sulfate de soude des cristaux à 7HO identiques à ceux d'où elle provient.

Ces deux sels effleuris se distinguent donc du sel anhydre obtenu par l'action de la chaleur sur les deux hydrates chauffés au delà de 34 degrés; car ce dernier n'exerce aucune action sur les solutions sursaturées étendues et, sur les solutions convenablement concentrées, il ne produit que très-lentement des cristaux de l'hydrate à 7HO.

On peut expliquer cet effet en admettant qu'il reste dans les cristaux effleuris une quantité de l'hydrate primitif suffisante, quoique infiniment petite, pour provoquer la formation de cristaux semblables. En vue d'éclaircir ce point, j'ai laissé pendant plusieurs années (depuis le 16 avril 1873 jusqu'au 16 novembre 1876) dans l'air parfaitement sec des quantités très-petites de sel effleuri et elles ont conservé leur action primitive. Les mêmes parcelles de sulfate de soude effleuri, exposées pendant deux mois dans le vide sec d'une pompe à mercure, n'ont pas perdu leur propriété. Enfin j'ai essayé d'enlever les dernières traces d'eau supposées retenues par cette poussière effleurie en la laissant au contact d'une grande quantité d'alcool et d'éther anhydres et faisant ensuite un vide aussi complet que possible; mais le sel effleuri continua à produire dans les solutions sursaturées des cristaux identiques.

Si la combinaison de l'eau avec l'alcool ou l'éther anhydre dégageaient plus de chaleur que l'hydratation du sel effleuri, on pourrait conclure des expériences précédentes que la déshydratation du sel effleuri est absolue, et l'on serait conduit à admettre que, dans le phénomène de l'efflorescence, la molécule cristalline perd de l'eau sans changer de forme générale, et qu'ainsi, la place de l'eau dans la molécule étant disponible, elle se trouve occupée de nouveau au moment où l'on met au contact de la solution le sel effleuri, qui agit alors comme un cristal de l'hydrate d'où il provient. Mais la chaleur d'hydratation du sulfate de soude anhydre doit être supérieure à celle de l'alcool ou de l'éther, et, s'il en est ainsi, il est infiniment probable que l'emploi de ces substances n'enlève pas au sel les dernières traces d'eau, de sorte que je ne crois pas qu'on puisse tirer de ces expériences une conséquence inattaquable.

J'ai observé des phénomènes tout à fait identiques aux précédents en

étudiant l'effet des chromates de soude à 10HO et à 4HO, effleuris dans l'air sec ou dans le vide sec, sur les solutions sursaturées de cette substance; les hydrates effleuris de l'hyposulfite de soude à 5HO et à 2HO, ceux de l'azotate de chaux à 4HO et à 3HO, ceux de l'acétate de soude à 6HO et à 3HO, du chlorure de calcium à 6HO et à 4HO se comportent de la même manière: les divers hydrates effleuris ne donnent dans des solutions sursaturées, d'une concentration convenable, que des cristaux identiques à ceux dont ils proviennent, quelle que soit la durée de leur séjour dans l'air sec ou dans le vide poussé aussi loin qu'il est possible.

VIII. — Action de l'eau sur les sels anhydres.

Les corps qui, à l'état anhydre, ne font pas cristalliser leurs solutions sursaturées peuvent, quand on les met au contact de l'eau pure, donner des solutions sursaturées sans qu'il soit nécessaire de chauffer le mélange. Cette particularité, signalée pour la première fois par M. Reischauer dans le cas de l'acétate de soude fondu⁽¹⁾, puis par M. de Coppet dans le cas du sulfate de soude⁽²⁾, me paraît être, lorsqu'on emploie peu d'eau, une conséquence toute naturelle de deux faits: la nullité d'action du sel anhydre sur la solution sursaturée et le dégagement de chaleur qui résulte de la combinaison du sel anhydre avec l'eau. Ce dégagement de chaleur est en effet très-considérable; il en résulte que, si l'on met le sel en contact avec la quantité d'eau convenable pour qu'il en résulte une solution sursaturée, le mélange est porté à une température telle que la quantité de sel qui peut se dissoudre est très-grande; et, comme la présence du sel anhydre ne gêne pas la sursaturation, lorsque le mélange revient à la température ambiante, il forme une solution sursaturée. Pour constater cette élévation de température, on met dans un tube fermé à un bout et ne contenant aucune trace de sel hydraté le sel anhydre pulvérisé; on y introduit le réservoir d'un thermomètre de petite dimension, puis on ajoute dans le tube une quantité d'eau calculée pour qu'il y ait sursaturation à la température

(¹) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. 113, p. 116; 1860.

(²) *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 1324; 1872.

ambiante. La température s'élève rapidement et l'on constate, par exemple dans le cas du sulfate de soude, que le thermomètre monte de 18 à 28 degrés, et dans le cas du chromate de soude, de 18 à 42 degrés. Dans le cas où l'on empêche l'élévation de la température en maintenant l'eau, que l'on additionne de sel anhydre, dans un bain réfrigérant, la production de chaleur par le fait de l'hydratation n'en existe pas moins, seulement elle est employée à la fois à produire la fusion et la dilution du sulfate de soude et à échauffer le bain ambiant.

On peut manifester dans un grand nombre de sels des propriétés analogues à celles dont nous venons de parler. Le chromate de soude déshydraté par la chaleur et introduit dans un tube maintenu à la température ordinaire, puis additionné d'eau versée goutte à goutte, donne, comme nous l'avons vu, une solution sursaturée que l'on peut faire prendre en une masse cristalline par le contact d'un cristal de chromate de soude ordinaire.

De même, l'hyposulfite de soude déshydraté à 160 degrés, puis additionné peu à peu d'eau distillée froide, donne une solution sursaturée qui ne cristallise qu'au contact d'un cristal.

L'acétate de soude, l'azotate de chaux se comportent absolument de la même manière.

Il en est de même du chlorure de calcium que l'on a déshydraté en le chauffant au rouge et qu'on additionne peu à peu d'eau après le refroidissement ou que l'on introduit dans l'eau par petites quantités, à la température ambiante de 20 degrés, par exemple : on obtient ainsi une solution sursaturée, susceptible de donner les cristaux à GHO dans les mêmes conditions que la solution faite à chaud.

Indépendamment des propriétés générales dont il a été question dans ce Mémoire, il y aurait lieu, pour donner une étude complète de la sursaturation, de passer en revue d'autres particularités intéressantes, telles que les variations de tension des vapeurs émises par les solutions sursaturées, la mesure des changements de volume qui se produisent au moment de la cristallisation et celle des quantités de chaleur correspondantes : je laisserai de côté ces questions pour le moment et je me contenterai de généraliser les résultats que je viens d'indiquer, en faisant voir qu'ils s'appliquent aux solutions dans divers liquides.

Solutions sursaturées dans d'autres liquides que l'eau.

Le rôle de l'eau dans la production des solutions sursaturées peut être envisagé de la manière suivante : dans le cas de la sursaturation de sels anhydres, l'eau intervient uniquement comme dissolvant capable de retenir à l'état liquide le corps qui, dans les mêmes conditions de température, prendrait l'état solide; dans le cas de la sursaturation de sels hydratés, l'eau peut intervenir aussi d'une autre manière, comme susceptible de former avec le sel anhydre un ou plusieurs hydrates. Il est des liquides qui peuvent, comme l'eau, jouer à la fois le rôle de dissolvant et de corps qui se combine avec un composé anhydre; il est naturel de supposer qu'ils donneront aussi des solutions sursaturées : tel est, par exemple, l'alcool ordinaire, dissolvant d'une multitude de corps et qui se combine avec un certain nombre de sels, tels que le chlorure de calcium, l'azotate de magnésie, etc., pour donner des composés $\text{CaCl}_2 \cdot 2(\text{C}^1\text{H}^6\text{O}^2)$; $\text{MgO} \cdot \text{AzO}^3 \cdot 3(\text{C}^1\text{H}^6\text{O}^2)$ J'ai constaté que l'alcool donne facilement des solutions sursaturées avec un grand nombre de substances; je citerai les suivantes, qui se prêtent très-bien aux expériences :

Acétates de cadmium, de magnésie, de plomb, de soude, de zinc.

Biacétate de potasse.

Azotates de cadmium, de chaux, de cobalt, de cuivre, de fer, de lithine, de magnésie, de manganèse, de nickel.

Chlorure de calcium, de cobalt.

Les solutions sursaturées de ces diverses substances dans l'alcool présentent les mêmes particularités que celles qu'on observe en employant l'eau comme dissolvant. Du reste, les autres alcools se comportent comme l'alcool du vin, et l'alcool méthylique, en particulier, donne très-facilement des solutions sursaturées avec les substances indiquées ci-dessus.

Parmi les alcools polyatomiques, la glycérine donne lieu à des solutions sursaturées intéressantes avec un grand nombre de composés; je citerai les suivants, qui se prêtent le mieux aux expériences :

Acétates de cadmium, de magnésie, de plomb, de soude.

Biacétate de potasse.

Arséniate de soude.

Azotates de chaux, de fer, de magnésie, de zinc.

Carbonate de soude.

Chlorures de calcium, de cobalt, de manganèse.

Chromate de soude.

Hyposulfite de soude.

Mannite.

Sulfates de cuivre, de fer, de magnésie, de manganèse, de nickel, de soude, de zinc ; aluns d'ammoniaque, de chrome, de potasse, de thallium.

J'ai rencontré, chez un certain nombre de ces solutions, une particularité qu'il importe de signaler, c'est que l'indice de réfraction de l'eau mère au sein de laquelle se produisent les cristaux est très-peu différent de celui des cristaux eux-mêmes, de sorte qu'il faut souvent beaucoup d'attention pour en constater la formation.

Plusieurs de ces dissolutions se comportent, du reste, comme les solutions aqueuses lorsqu'elles sont suffisamment concentrées; elles abandonnent spontanément des cristaux moins hydratés que le sel ordinaire : telles sont, par exemple, les solutions d'arséniate de soude, de chlorure de manganèse et des aluns d'ammoniaque et de potasse.

Outre les alcools, les liquides les plus divers peuvent servir à la préparation de solutions sursaturées avec des substances convenablement choisies : tels sont les carbures d'hydrogène, les phénols. Le sulfure de carbone est aussi un dissolvant qui se prête bien, malgré sa volatilité, à la préparation de solutions sursaturées de plusieurs substances.

Pour ce qui est des corps capables de donner des solutions sursaturées dans des dissolvants convenables, ils sont de natures très-diverses : nous avons vu qu'il en est un grand nombre qui sont des hydrates, quelques-uns sont anhydres ; on peut même facilement obtenir des solutions sursaturées de corps simples.

Ainsi le soufre donne très-facilement des solutions sursaturées dans le sulfure de carbone, la benzine, le toluène, etc., que nous étudierons ultérieurement; mais il importe, pour les conserver, que la solution ne présente pas à l'air une grande surface, sinon les courants d'air qui s'y produisent peuvent déterminer une évaporation rapide du dissolvant avec une absorption de chaleur qui, dans le cas du sulfure de carbone, peut amener brusquement la couche superficielle de la solution à une température où cesse la sursaturation : de là une production abondante

de petits cristaux qui, après avoir déterminé à la surface du liquide des effets de capillarité intéressants, se multiplient ensuite en descendant dans la solution.


Avec le phosphore on obtient facilement aussi des solutions sursaturées dans le sulfure de carbone: il suffit pour cela d'ajouter dans un tube à un poids déterminé de phosphore un poids très-faible de sulfure de carbone qui n'atteigne pas $\frac{1}{20}$ de celui du phosphore employé; on chauffe sous une couche d'eau distillée et on laisse refroidir. On obtient ainsi des solutions sursaturées qui restent liquides à des températures voisines du point de fusion de la glace. Comme le phosphore surfondu, elles sont insensibles à l'action du phosphore rouge; mais, au contact d'une parcelle de phosphore blanc, elles donnent immédiatement des cristaux de phosphore et non une masse d'apparence vitreuse et continue comme le phosphore surfondu. Ces solutions se conservent bien sous l'eau, mais il faut les préserver de l'action de la lumière qui transforme le phosphore dissous en phosphore rouge, en même temps que le sulfure de carbone se décompose lui-même lentement; le reste du liquide n'en constitue pas moins une solution sursaturée de phosphore ordinaire, le phosphore rouge séparé de la solution à l'état solide n'ayant pas la propriété de faire cristalliser le phosphore blanc resté en solution.

Il résulte de ce qui précède que les substances les plus diverses, mises en contact avec les dissolvants les plus variés, peuvent donner des solutions sursaturées; on est conduit à se demander si une substance soluble dans un liquide, mais n'y produisant pas de solution sursaturée, serait susceptible d'en donner dans un autre dissolvant. S'il en était ainsi, on pourrait espérer amener presque tous les corps à l'état de solution sursaturée et l'on se trouverait en état d'élucider un certain nombre de questions intéressantes relatives à la structure moléculaire des corps.

Les nombreuses tentatives que j'ai faites jusqu'ici m'ont conduit à reconnaître que lorsqu'un corps, soluble dans un liquide et traité avec les précautions que j'ai recommandées dans le cours de ce Mémoire, ne donne pas de solutions sursaturées, on ne réussit généralement pas à en obtenir avec d'autres dissolvants, quelle que soit d'ailleurs leur consistance. On ne réussit pas davantage lorsqu'on essaye d'empêcher la

crystallisation spontanée, par l'addition de matières qui ont pour effet d'augmenter la viscosité du liquide, telles que la gomme, la dextrine, la colle de poisson. La propriété de donner des solutions sursaturées paraît donc dépendre de la nature même de la substance et ne semble pas pouvoir être déterminée par l'intervention de corps étrangers analogues à ceux que je viens d'indiquer.

24 novembre 1876.



SUR

L'ÉQUATION DE KEPLER,

PAR M. GOURIER,
ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Dans le cours professé à la Sorbonne l'année dernière, M. Hermite s'est occupé de l'équation de Kepler, et il a bien voulu m'engager à rédiger, d'après ses indications, la démonstration d'une propriété importante des racines de cette équation.

L'équation

$$(1) \quad f(z) = z - \alpha - E \sin z = 0,$$

dans laquelle α représente un angle donné compris entre zéro et π , et E une constante positive inférieure à l'unité, a une racine réelle comprise entre zéro et π et une infinité de racines imaginaires. En divisant le plan sur lequel on figure les valeurs de z par des bandes parallèles à l'axe des y , et distantes de π , chaque bande de rang impair du côté des x positives comprend deux racines conjuguées, et de même chaque bande de rang pair du côté des x négatives.

Si l'on considère la bande de rang $2k + 1$ du côté des x positives, et si l'on représente par $x \pm yi$ les deux racines comprises dans cette bande, il s'agit d'établir que, pour les grandes valeurs de k , la valeur de x est à peu près égale à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, et celle de y à $L \frac{2}{E} + L \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$.

A cet effet, traçons dans cette bande un rectangle ABCD dont les

sommets correspondent aux quatre valeurs suivantes de z :

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + ai, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon + ai,$$

dans lesquelles ε représente une constante positive, prise arbitrairement aussi petite que l'on veut, et a une autre constante positive dont le minimum sera déterminé plus loin. Nous allons démontrer que, quand k a une valeur supérieure à une certaine limite, ce rectangle renferme une des racines de l'équation. En faisant mouvoir le point z dans le sens direct sur le contour du rectangle, on reconnaît aisément que le nombre μ des racines situées à l'intérieur de ce rectangle est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} 2\mu = & \mathbf{I} \left[\frac{t + \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon} \right]_0^a \\ & - \mathbf{I} \left[\frac{t - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon} \right]_0^a \\ & + \mathbf{I} \left[\frac{a - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^a - e^{-a}) \sin(t - \varepsilon)}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - t - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^a + e^{-a}) \cos(t - \varepsilon)} \right]_0^{2\pi}, \end{aligned}$$

dans laquelle ω représente la quantité $2k\pi - \alpha$, et \mathbf{I} un indice pris par rapport à t .

L'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0$$

admet une seule racine réelle positive t_1 . De même l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{\mathbf{E}}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0$$

admet une seule racine positive t_2 moindre que t_1 . Nous supposons

α supérieur à t_1 . L'équation

$$t - \frac{E}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon = 0$$

est vérifiée par $t = 0$, et admet une seule racine positive t_3 ; nous démontrerons que, lorsque ω dépasse une certaine limite, t_3 est nécessairement inférieur à t_2 . Supposons cette condition remplie; on voit alors que le premier indice est égal à $+1$, que le second est égal à -1 , et que le troisième est égal à zéro. On a donc

$$\mu = 1.$$

La fonction $t - \frac{E}{2} (e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon$ s'annule pour $t = 0$; elle va en croissant lorsque t varie depuis zéro jusqu'à la racine positive de l'équation

$$1 - \frac{E}{2} (e^t + e^{-t}) \sin \varepsilon = 0,$$

puis elle décroît continuellement; donc, pour que t_3 soit inférieur à t_2 , il suffit que l'on ait

$$(2) \quad t_2 - \frac{E}{2} (e^{t_2} - e^{-t_2}) \sin \varepsilon < 0.$$

Mais t_2 , étant la racine de l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{E}{2} (e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0,$$

est supérieur à $L(\omega)$. L'inégalité (2) sera satisfaite si l'on a

$$L(\omega) - \frac{E}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right) \sin \varepsilon < 0.$$

On déduit de cette inégalité une limite de ω et par suite de k .

Connaissant la valeur de x , on peut obtenir celle de γ par l'équation

$$x - \alpha - \frac{E}{2} (e^x + e^{-x}) \sin x = 0$$

ou

$$\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{E}{2}(e' + e^{-\gamma}) \cos \gamma = 0,$$

dans laquelle γ désigne une quantité très-petite, positive ou négative.
De cette équation on tire approximativement

$$y = L \frac{2}{E \cos \gamma} + L \left(\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma \right).$$

La valeur de y est donc, à peu près,

$$y = L \frac{2}{E} + L \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

MÉMOIRE

SUR L'ÉLIMINATION,

PAR M. H. LEMONNIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

Dans les séances du 11 et du 25 janvier 1875, M. Bertrand a bien voulu communiquer à l'Académie les principaux résultats d'un travail que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui (26 juillet, même année) à son appréciation.

Ce Mémoire, annoncé par M. le Secrétaire perpétuel, dans la séance du 25 janvier, est divisé en trois Parties.

La première a pour objet de mettre en évidence l'intime liaison qui unit, au point de vue analytique, les méthodes d'élimination connues sous les noms d'Euler, de Sylvester, de Cayley, de Bezout, de Cauchy. J'en ai déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et requises pour que deux équations entières en x ,

$$F(x) = Ax^m + \dots + A_n, \quad f(x) = ax^n + \dots + a_n,$$

aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces racines, ou du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

La deuxième Partie consiste dans l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir ces conditions et l'équation aux racines communes. L'application en est immédiate au théorème de Sturm. Les polynômes qui proviennent d'une fonction entière et de sa dérivée sont des fonctions équivalentes aux fonctions de Sturm proprement dites. Les premiers termes, les derniers, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer à part. Le procédé de calcul nous paraît d'une grande sûreté et d'une simplicité qui pourra contribuer à donner un intérêt pratique au théorème de l'illustre Genevois.

Dans la troisième Partie, les mêmes considérations sont appliquées à la résolution de deux équations entières en x et y ,

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Les solutions du système s'obtiennent sans omission et directement, sans calculs qui portent à faux, avec l'avantage, si les deux polynômes ont un plus grand commun diviseur dépendant de x et de y , de le faire trouver en même temps que l'équation finale due à sa suppression.

Ajoutons que les systèmes particuliers auxquels conduit la méthode de M. Labatie s'obtiennent également par l'application de notre procédé, de sorte que l'équation finale peut être débarrassée des racines qui y figurent. Mais la méthode de M. Labatie, par la succession même des divisions, donne lieu à une complication qui ressort des liaisons qui unissent nos polynômes, comme du rapprochement que nous faisons entre les deux procédés.

Il n'est question, du reste, dans ce travail, que de racines communes ayant des modules finis, et de solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

1. Soient

$$F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

($m \geq n$), deux équations entières en x .

Si aucune racine ne leur est commune, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ ne peut être simplifiée.

Si elles ont une racine commune r , les deux termes étant divisibles

par $x - r$, la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)},$$

$F_1(x)$ désignant un polynôme du degré $m - 1$,

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1},$$

et $f_1(x)$ un polynôme du degré $n - 1$,

$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}.$$

Quand il n'y a qu'une racine commune, la simplification ne peut se pousser plus loin.

Lorsqu'il y a p racines communes, sans qu'il y en ait davantage, ($p \leq n$), la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_p(x)}{f_p(x)} = \frac{\alpha_{p-1} x^{m-p} + \dots + \alpha_{m-1}}{\beta_{p-1} x^{n-p} + \dots + \beta_{n-1}},$$

et ne comporte pas une plus grande réduction.

Au cas d'une racine commune, les rapports entre les coefficients de $F_1(x)$, $f_1(x)$ ont des valeurs déterminées; il en est de même au cas de p racines communes, pour les rapports entre les coefficients de $F_p(x)$, $f_p(x)$.

2. D'après cela, on peut se proposer de trouver des valeurs de α_i , β_j , telles qu'on ait identiquement dans un cas

$$f(x) (\alpha_0 x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x) (\beta_0 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}) = 0,$$

et dans l'autre

$$f(x) (\alpha_{p-1} x^{m-p} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x) (\beta_{p-1} x^{n-p} + \dots + \beta_{n-1}) = 0.$$

Dans le premier cas, si l'on égale à zéro les coefficients des différentes puissances de x , on a, pour déterminer les α_i , β_j , ou plutôt leurs rapports, un système de $m + n$ équations du premier degré, homogènes. Ce système sera satisfait autrement que par $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$;

mais il ne présentera qu'une seule solution pour les rapports entre ces inconnues.

En conséquence, le déterminant des coefficients des α_i et β_j sera nul, et les déterminants mineurs d'ordre $m + n - 1$ ne seront pas tous nuls. Par la suppression de l'une des équations du système, alors que le déterminant général est nul, on a donc un système de $m + n - 1$ équations propres à déterminer, par exemple, les rapports de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ à α_0 . Pour obtenir la racine commune, il y aura d'ailleurs à diviser $F(x)$ par $F_1(x)$, ce qui n'exigera que d'avoir évalué $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Dans le second cas, en égalant à zéro les coefficients de

$$f(x)(\alpha_{p-1}x^{m-p} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{p-1}x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}),$$

on aura en α_i, β_j des équations homogènes du premier degré dont le nombre sera $m + n - p + 1$. Les indéterminées y seront en nombre égal à $(n - p + 1) + (m - p + 1) = m + n - 2p + 2$. Les rapports à en déduire sont ainsi en nombre égal à $m + n - 2p + 1$. Il y a donc p équations de trop.

Les valeurs de ces rapports, tirées de $m + n - 2p + 1$ équations, devront satisfaire aux p autres : de là p équations de condition. On les obtiendra en égalant à zéro les déterminants formés des coefficients dans $m + n - 2p + 1$ équations et y joignant tour à tour les coefficients de chacune des p autres équations.

D'ailleurs l'équation propre à donner les p racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le quotient de $F(x)$ par

$$\alpha_{p-1}x^{m-p} + \dots + \alpha_{m-1}.$$

Ajoutons que la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra se changer d'une infinité de manières en fractions dont les termes soient de degrés supérieurs à $m - p$ et $n - p$, de sorte qu'on pourra avoir identiquement

$$f(x)(\alpha_{q-1}x^{m-q} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{q-1}x^{n-q} + \dots + \beta_{n-1}) = 0,$$

q étant $> p$, sans que les rapports entre les α_i et β_j soient là déterminés.

Tel est, en substance, le procédé d'Euler.

II.

Procédé de M. Sylvester.

3. Considérons le cas où les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont ou doivent avoir une seule racine commune.

Nous venons de voir que si les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, on peut avoir identiquement

$$(I) \quad f(x)(\alpha_0 x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_0 x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}) = 0,$$

et cela d'une seule façon; que, réciproquement, les deux équations ont une racine commune, et une seule, quand l'identité est possible d'une seule manière.

Or, si l'on considère le système

$$II. \quad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x f(x) = 0, & x F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-1} f(x) = 0, & x^{n-1} F(x) = 0, \end{cases}$$

il est à remarquer qu'avoir l'identité (I), c'est avoir nulle identiquement une combinaison linéaire de ces équations (II).

Faisons passer les exposants en indices dans ce système II; il se changera en un système (II)' de $m + n$ équations du premier degré, contenant $m + n - 1$ inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}$. Par là l'identité se rapporte à une combinaison linéaire de ces équations, dont le nombre surpasse d'une unité celui des inconnues.

Du moment que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, cette racine satisfait à toutes les équations du système (II). Ses puissances successives x, x^2, \dots, x^{m+n-1} constituent, en se prenant respectivement pour valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}$, une solution du système (II)'. Dès lors le déterminant D des coefficients des inconnues et des termes indépendants des inconnues, termes en x_0 , se trouve nul.

4. Soit $D = 0$. Soit en même temps différent de zéro le déterminant des coefficients des inconnues dans $m + n - 1$ équations du sys-

tème (II)'. Les valeurs des inconnues pourront se tirer de ces $m + n - 1$ équations, et, substituées dans la $(m + n)^{\text{ième}}$, elles y satisferont.

Cette dernière équation est alors une combinaison linéaire des autres. Il y a une combinaison linéaire des $m + n$ équations qui est nulle identiquement; mais, de plus, il n'y en a qu'une. L'identité d'Euler est possible, et d'une seule façon; donc alors les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule. Comme les puissances successives de cette racine satisfont aux équations (II)', en se prenant pour valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}$, elles en constituent l'unique solution. Le calcul de x , donnera donc la racine commune.

Ainsi les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, lorsque le déterminant D est nul, et que le déterminant des inconnues dans $m + n - 1$ des équations (II)' n'est pas nul.

5. Réciproquement, telles sont les circonstances qui ont lieu quand les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule.

Observons d'abord qu'il est déjà établi qu'on a $D = 0$, s'il y a une racine commune.

D'autre part, les déterminants mineurs dérivant de D et de tous ordres ne peuvent être nuls à la fois. Soit $m + n - k$ un ordre pour lequel les déterminants mineurs ne sont pas tous nuls, ceux de tout ordre supérieur l'étant.

Dans cet ordre, il y aura au moins un déterminant formé des coefficients des inconnues qui ne sera pas nul; car, si, dans un système de $m + n - k$ équations, les déterminants de l'ordre $m + n - k$ relatifs aux coefficients des inconnues sont tous nuls, tandis que l'un de ceux où figurent les termes indépendants des inconnues ne l'est pas, ce système ne comporte aucune solution.

Dans l'hypothèse faite que $F(x)$ et $f(x)$ ont une racine commune, les équations (II)' ayant au moins une solution, cela n'arrivera pas; donc, si les déterminants mineurs sont tous nuls jusqu'à ceux de l'ordre $m + n - k$ exclusivement, il se trouve un déterminant de cet ordre, formé des coefficients des inconnues, qui est différent de zéro. On pourra déduire du système correspondant d'équations $m + n - k$

inconnues en fonction des autres, et leurs valeurs substituées dans les équations restantes y satisferont; mais alors, si k est > 1 , ce n'est plus une seule combinaison des équations (II)' qui est identique, il y en a une infinité. Les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ auraient plus d'une racine commune.

Donc, lorsque les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et de plus x_1 , x_2 , ..., x_{m+n-1} peuvent se déterminer par $m + n - 1$ des $m + n$ équations (II)', en ce que les coefficients des inconnues y forment un déterminant différent de zéro.

Comme conditions suffisantes et nécessaires du fait que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient une racine commune, et une seule, nous avons ainsi la nullité de D, et cette particularité qu'un déterminant formé des coefficients de x_1 , x_2 , ..., x_{m+n-1} dans $m + n - 1$ des équations (II)' ne soit pas nul.

6. Il est à remarquer que, dans le système (II), x^{m+n-1} ne figure que par les équations $x^{m-1}f(x) = 0$, $x^{n-1}F(x) = 0$, avec les coefficients a et A différents de zéro.

Si une seule de ces équations figure dans le système des $m + n - 1$ équations qui donnent par les coefficients des inconnues un déterminant différent de zéro, il en résultera que le déterminant des coefficients de x_1 , x_2 , x_{m+n-2} , dans les équations

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ x^{m-2}f(x) = 0, & x^{n-2}F(x) = 0, \end{array} \right.$$

n'est pas nul. Réciproquement, quand ce déterminant est différent de zéro, il en est de même de celui qui concerne l'ensemble de ces équations et de soit $x^{m-1}f(x) = 0$, soit $x^{n-1}F(x) = 0$.

Or, si l'on considère ces équations (III), on voit qu'elles sont satisfaites par les puissances successives de la racine commune prises pour valeurs de x_1 , x_2 , ..., x_{m+n-2} . C'est leur unique solution; car, s'il en était autrement, une combinaison linéaire de ces équations serait iden-

tique, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{m-1} x^{m-1}) f(x) - (\mu_0 + \mu_1 x + \dots + \mu_{n-1} x^{n-1}) F(x) = 0;$$

d'où il s'ensuivrait pour $F(x)$ et $f(x)$ plus d'une racine commune, contrairement à l'hypothèse.

Donc, lorsque les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et le déterminant des coefficients des inconnues dans le système (III) ne l'est pas. Réciproquement, quand ces deux conditions sont remplies, les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule.

III.

7. Considérons le cas où il s'agit d'avoir p racines communes, tout au juste.

La question est d'exprimer avec Euler qu'on a identiquement

$$(I) \quad f(x) (\alpha_{p-1} x^{m-p} + \dots + \alpha_{m-1}) - F(x) (\beta_{p-1} x^{n-p} + \dots + \beta_{n-1}) = 0;$$

par une seule détermination des rapports entre $\alpha_{p-1} \dots \alpha_{m-1}$, $\beta_{p-1} \dots \beta_{n-1}$.

Cela revient à ce qu'une combinaison linéaire, et une seule, des équations

$$(II) \quad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p} F(x) = 0, \end{cases}$$

soit nulle identiquement.

Si l'on fait passer les exposants en indices, on a là un système (II)' de $m + n - 2p + 2$ équations du premier degré entre $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$.

Dans le cas traité plus haut de $p = 1$, le nombre des équations surpasse d'une unité celui des inconnues.

Au cas de $p = 2$, il y a $m + n - 2$ équations et autant d'inconnues.

Au cas de $p > 2$, on a $m + n - 2p + 2 < m + n - p$. Le nombre des inconnues surpasse de $p - 2$ celui des équations.

Toute racine commune aux équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ satisfait

aux équations (II). En prenant chacune d'elles et ses puissances successives pour valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$, on a une solution du système (II)'.

Si la relation (I) a lieu identiquement et d'une seule manière, une combinaison linéaire et une seule de ces équations (II)' sera identique.

8. Proposons-nous de reconnaître à quelles conditions cela aura lieu.

Désignons par N le nombre $m + n - 2p + 2$ des équations, et par $m_{i,j}$ le coefficient de rang j dans l'équation de rang i .

Le système des équations devient par là

$$(II)' \quad \sum_{j=1}^{j=N+p-1} m_{i,j} x_{j-1} = 0,$$

i variant de 1 à N et x_0 étant de valeur égale à 1.

La somme de ces équations multipliées respectivement par des facteurs M_i sera nulle identiquement si l'on a

$$(III) \quad \sum_{i=1}^{i=N} M_i m_{i,j} = 0,$$

j variant de 1 à $N + p - 1$.

Il s'agit ainsi de satisfaire à $N + p - 1$ équations homogènes du premier degré en M_1, M_2, \dots, M_N par des valeurs de ces indéterminées qui ne soient pas toutes nulles.

Prenons les N dernières équations de ce système (III). Pour qu'elles soient satisfaites, il faudra que le déterminant

$$D_N = \begin{vmatrix} m_{1,p} & m_{2,p} & \dots & m_{N,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1,N+p-1} & m_{2,N+p-1} & \dots & m_{N,N+p-1} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

Ce déterminant est d'ailleurs celui des coefficients de $x^{p-1}, x^p, \dots, x^{m+n-p}$ dans les équations (II).

Cette condition remplie, si un déterminant mineur d'ordre $N - 1$ relatif au même ensemble d'équations n'est pas nul, $N - 1$ des multiplicateurs M_i pourront se déduire des $N - 1$ équations correspondantes

en fonction du $N^{\text{ième}}$. Ces valeurs déterminées, substituées dans la $N^{\text{ième}}$ équation du groupe, y satisferont en raison de ce que $D_N = 0$; puis chacune des autres équations (III) sera également satisfaite moyennant une relation analogue, ce qui fera p équations de condition.

Par exemple, si le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} m_{1,p+1} & m_{2,p+1} & \dots & m_{N-1,p+1} \\ m_{1,p+2} & m_{2,p+2} & \dots & m_{N-1,p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1,N+p-1} & m_{2,N+p-1} & \dots & m_{N-1,N+p-1} \end{vmatrix},$$

qui est celui des coefficients de $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p}$ dans le système (II)'

privé de l'équation $\sum_{j=1}^{j=N+p-1} m_{Nj} x_{j-1} = 0$, est différent de zéro, les rap-

ports $\frac{M_1}{M_N}, \frac{M_2}{M_N}, \dots, \frac{M_{N-1}}{M_N}$ seront déterminés par les $N - 1$ dernières équations (III), et leurs valeurs satisferont aux autres, si le déterminant D_N et ceux qu'on forme en y remplaçant les éléments de la ligne supérieure tour à tour par ceux des lignes précédentes dans le système (III) sont tous nuls.

Il n'y a alors qu'une combinaison linéaire des équations (II) qui soit nulle identiquement.

Il est du reste à observer que, de quelque façon qu'on prenne N équations dans le système (III), le déterminant qui les concerne est nul.

Lorsque, pour ce système (III), il n'y a aucun déterminant mineur d'ordre $N - 1$ qui soit différent de zéro et qu'il s'en trouve un d'ordre $N - 2$ qui ne soit pas nul, on pourra des $N - 2$ équations correspondantes déduire les valeurs d'autant de quantités M_i en fonction des deux autres. Et ces valeurs, sans qu'aucune dépendance s'établisse entre les deux derniers multiplicateurs, satisferont aux différentes autres équations.

Si les déterminants mineurs d'ordre $N - 2$, comme ceux d'ordre $N - 1$, sont tous nuls, et ainsi de suite jusqu'à un déterminant d'ordre $N - k$ qui ne le soit pas, il y aura $N - k$ des quantités M_i qui pourront s'exprimer en fonction des autres, et, sans que ces dernières soient liées entre elles, elles satisferont à toutes les équations (III).

Mais, dans de telles circonstances, il y aura une infinité de combinaisons linéaires des équations (II)' susceptibles d'être identiques.

Par conséquent, pour qu'il n'y en ait qu'une, il faut qu'un déterminant mineur d'ordre $N - 1$ ne soit pas nul.

9. Alors que les relations (III) sont satisfaites par des valeurs déterminées de $N - 1$ des quantités M_i en fonction de la $N^{\text{ième}}$, les équations (II)' elles-mêmes sont telles que $N - 1$ d'entre elles déterminent $N - 1$ des inconnues x_{j-1} en fonction des p autres, et que ces valeurs substituées dans la $N^{\text{ième}}$ la vérifient, quelles que soient les valeurs de ces dernières inconnues.

Pour que cela s'applique au système (II), il faut avoir $x_0 = 1$; c'est donc un déterminant d'ordre $N - 1$, formé des coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$ dans $N - 1$ de ces équations, qui devra être différent de zéro.

10. En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une combinaison linéaire des équations (II) soit identique et qu'elle soit unique sont que le déterminant des coefficients de $N - 1$ des inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$ dans $N - 1$ des équations (II)' soit différent de zéro, et que les valeurs de ces inconnues tirées du système correspondant satisfassent à la $N^{\text{ième}}$, quelles que soient les valeurs attribuées aux autres inconnues.

Les relations par lesquelles s'exprime ce fait consistent en ce que les déterminants formés par les coefficients des $N - 1$ inconnues dont il s'agit dans les N équations, quand on y joint tour à tour ceux de chacune des $p - 1$ autres inconnues, et les termes indépendants des inconnues sont nuls séparément.

Cela étant, l'identité (I) a lieu, et d'une seule façon. Donc les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont alors p racines communes sans en avoir davantage.

Puis, réciproquement, quand il y a p racines communes et p seulement, il doit en être ainsi.

Les conditions exprimées sont donc celles qui sont nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient p racines communes et n'en aient pas davantage.

11. Ce n'est pas tout. Il nous reste à voir comment c'est le détermi-

nant d'ordre $N - 2$ des coefficients de $x^p, x^{p+1}, x^{m+n-p-1}$, dans le système

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x^{m-p-1}f(x) = 0, & x^{n-p-1}F(x) = 0, \end{array} \right.$$

qui doit être différent de zéro, puis quel heureux parti on peut tirer du système (II) pour obtenir l'équation aux racines communes, et former par là même le plus grand commun diviseur des polynômes $F(x), f(x)$.

Nous avons déjà fait observer que chacune des p racines communes à $F(x)$ et $f(x)$ satisfait au système (II), de sorte que le système d'équations du premier degré admet au nombre de ses solutions, comme valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$, chacune des p racines communes et ses puissances successives jusqu'au degré $m + n - p$. Dans ces solutions, $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p}$ sont les mêmes fonctions déterminées de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} . Les p racines communes sont données, en effet, par une équation de degré p , laquelle détermine x^p en fonction de x, x^2, \dots, x^{p-1} , et de laquelle on peut déduire, en fonction des mêmes quantités, les puissances suivantes $x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^{m+n-p}$. D'après quoi, pour ce qui regarde toute racine commune, les valeurs de $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p}$ sont déterminées dans le système (II) en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} . Donc le déterminant de leurs coefficients dans $N - 1$ des équations doit être différent de zéro.

Ce fait acquis, remarquons que x_{m+n-p} ne figure que par les équations $x^{m-p}f(x) = 0, x^{n-p}F(x) = 0$, avec des coefficients a, A différents de zéro.

Il en résulte que, si une seule des deux entre dans le système des $N - 1$ équations pour lesquelles les coefficients de x_p, \dots, x_{m+n-p} forment un déterminant différent de zéro, les autres donnent à elles seules les valeurs de $x_p, \dots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, \dots, x_{p-1} , et, par conséquent, elles présentent alors un déterminant différent de zéro, c'est-à-dire qu'alors le déterminant des coefficients de $x_p, x_{p+1}, x_{m+n-p-1}$, dans le système des $N - 2$ équations (IV), n'est pas nul; puis les conditions établies deviennent que les déterminants formés des coefficients de $x_p,$

$x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p}$ dans les N équations, en y joignant tour à tour ceux de $x_{p-1}, x_{p-2}, \dots, x_1, x_0$ soient égaux à zéro.

Pour reconnaître qu'il doit en être ainsi, soit $\theta(x)$ le plus grand commun diviseur de $F(x), f(x)$, et posons

$$f(x) = \theta(x) \varphi(x), \quad F(x) = \theta(x) \Phi(x).$$

Considérons le système (IV), ou plutôt ce qu'il devient, quand on y fait passer les exposants en indices. C'est un système de $m+n-2p$ équations auquel on satisfait par les valeurs de $x^p, x^{p+1}, x^{m+n-p-1}$ déduites de l'équation $\theta(x) = 0$, en les prenant pour $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p-1}$.

Si cette solution est unique, en tant que $x_p, \dots, x_{m+n-p-1}$ soient les inconnues, le déterminant des coefficients de ces inconnues est différent de zéro; mais il en serait autrement si la solution n'était pas unique, et alors une combinaison linéaire des équations serait nulle, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\mu_0 + \mu_1 x + \dots + \mu_{m-p-1} x^{m-p-1}) \varphi(x) - (\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-p-1} x^{n-p-1}) \Phi(x) = 0.$$

D'après quoi les polynômes $\varphi(x), \Phi(x)$, étant des degrés $m-p, n-p$, auraient au moins une racine commune, tandis qu'ils sont premiers entre eux. Donc, du moment que $F(x)$ et $f(x)$ n'ont que p racines communes, le déterminant dont il s'agit est différent de zéro. D'ailleurs, quand ce déterminant n'est pas nul, celui des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m+n-p}$ dans l'ensemble des équations (IV) et de l'équation $x^{m-p} f(x) = 0$ ou $x^{n-p} F(x) = 0$ ne l'est pas non plus.

A la place des conditions générales formulées au n° 10, nous pouvons donc poser, comme conditions plus précises, que le déterminant d'ordre $m+n-2p$ des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m+n-p-1}$, dans les équations (IV), soit différent de zéro, et que les déterminants d'ordre $m+n-2p+2$, formés des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m+n-p}$, joints tour à tour à ceux de $x^{p-1}, x^{p-2}, \dots, x, x^0$ dans le système (II), soient nuls.

12. Nous pouvons maintenant nous proposer d'obtenir les p racines communes au moyen des équations (II) elles-mêmes.

Si l'on exclut du système (II)' les deux équations $x^{m-p} f(x) = 0$,

$x^{n-p} F(x) = 0$, les autres, comme on vient de le reconnaître, déterminent $x_p, \dots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} , de sorte qu'on peut poser

$$\begin{aligned} x_p &= h + h_1 x_1 + \dots + h_{p-1} x_{p-1}, \\ x_{p+1} &= k + k_1 x_1 + \dots + k_{p-1} x_{p-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Mais si l'on exclut du système des N équations les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, les autres, quand on les divise par x , reproduisent le système précédent, sauf à y voir pour inconnues, à la place de x_p, x_{p+1}, \dots les rapports $\frac{x_{p+1}}{x_1}, \dots, \frac{x_{m+n-p}}{x_1}$ et $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_p}{x_1}$ à la place de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} . On aura en conséquence

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 \frac{x_2}{x_1} + \dots + h_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 \frac{x_2}{x_1} + \dots + k_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si l'on prend pour x_1, x_2, \dots, x_p des valeurs qui satisfassent à l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \dots + h_{p-1} x^{p-1},$$

comme puissances successives de x , il s'ensuivra

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_{p-1} x_{p-1} = x_p, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{p-1} x_{p-1} = x_{p+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= x_p x_1 = x^p x = x^{p+1}, \\ x_{p+2} &= x_{p+1} x_1 = x^{p+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ seront donc vérifiées par chacune des racines de l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \dots + h_{p-1} x^{p-1}.$$

Ainsi on obtient l'équation dont les racines sont les p racines communes à $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, toutes conditions remplies, bien entendu, par l'élimination de x^{p+1} , x^{p+2} , ..., $x^{m+n-p-1}$ dans le système d'équations (IV).

On obtiendra une équation équivalente par toute élimination des mêmes inconnues et de x^{m+n-p} entre les équations (II).

13. Finalement, le théorème suivant est établi :

Étant données deux équations entières en x , $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ de degrés m et n ($m \geq n$), soient considérées les $m + n - 2p + 2$ équations

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p}f(x) = 0, & x^{n-p}F(x) = 0. \end{array}$$

Si l'on égale à zéro les déterminants formés des coefficients de x^p , ..., x^{m+n-p} dans ces équations, en y associant tour à tour ceux de x^{p-1} , x^{p-2} , ..., x et x^0 , les p relations, posées par là entre les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient p racines communes, finies, déterminées, sans en avoir davantage, pourvu que le déterminant formé des coefficients de x^p , x^{p+1} , ..., $x^{m+n-p-1}$, dans les équations

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p-1}f(x) = 0, & x^{n-p-1}F(x) = 0, \end{array}$$

soit différent de zéro.

De plus, l'équation aux racines communes s'obtiendra par l'élimination de x^{p+1} , x^{p+2} , ..., $x^{m+n-p-1}$ entre ces $m + n - 2p$ dernières équations.

14. Pour faire l'élimination, on pourra prendre le déterminant des coefficients de x^p , x^{p+1} , ..., $x^{m+n-p-1}$ dans les $m + n - 2p$ équations, et le développer par rapport aux coefficients de x^p . Si l'on multiplie

les équations respectivement par les multiplicateurs de ces coefficients et que l'on ajoute les résultats, l'équation qui s'ensuivra sera l'équation aux racines communes. Les coefficients de $x^p, x^{p-1}, \dots, x, x^0$ y seront le déterminant considéré et ceux qui en résultent quand on remplace tour à tour la colonne des coefficients de x^p par celles des coefficients de $x^{p-1}, x^{p-2}, \dots, x$ et x^0 .

Il y a là un mode de formation de l'équation aux racines communes, et, par suite, du plus grand commun diviseur en x des polynômes $F(x), f(x)$, qui a une importance considérable, comme la suite de ce Mémoire le fera voir.

Les déterminants qui y figurent sont d'ordre $m + n - 2p$, et ceux qui s'égalent à zéro pour constituer les p équations de condition sont d'ordre $m + n - 2p + 2$; mais nous verrons plus loin que les mêmes relations peuvent s'obtenir, avec plus d'avantage, au moins, s'il s'agit de calculs numériques, sous forme de déterminants d'ordre $m - p + 1$ $m \geq n$.

IV.

15. Quand les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une ou plusieurs racines communes, chacune de ces racines satisfait à l'équation

$$\frac{F(x')f(x) - f(x')F(x)}{x' - x} = 0,$$

quelque valeur qu'on attribue à x' .

Or on a

$$F(x') = x' - x) F_1(x') + F(x),$$

$F_1(x')$ étant le quotient de $F(x')$ par $x' - x$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{r|l} Ax'^{n-1} + Ax & x'^{n-2} + Ax^2 & x'^{n-3} + \dots \\ + A_1 & + A_1 x & \\ & + A_2 & \end{array}$$

et soit de même $f_1(x')$ égale à

$$\begin{array}{r|l} ax'^{m-1} - ax & x'^{m-2} + ax^2 & x'^{m-3} - \dots \\ - a_1 & - a_1 x & \\ & + a_2 & \end{array}$$

Considérons, en effet, le système

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-1}f(x) = 0, & x^{m-1}F(x) = 0, \end{array} \right.$$

et, en même temps, les équations précédentes sous leur première forme.

La première de celles-ci est une combinaison linéaire des deux qui sont là sur la première ligne; la seconde en est une des deux qui sont sur la seconde ligne et des deux précédentes, et ainsi de suite.

17. Au cas de $m > n$, l'identité

$$F_1(x')f(x) - f_1(x')F(x) = 0$$

se résout en

$$(\alpha_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Af(x) = 0, \\ (Ax + A_1)f(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-n+1} + A_1x^{m-n+2} + \dots + A_{m-n-1})f(x) = 0, \\ (Ax^{m-n} + \dots + A_{m-n})f(x) - aF(x) = 0, \\ (Ax^{m-n+1} + \dots + A_{m-n+1})f(x) - (ax + a_1)F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-1} + \dots + A_{m-1})f(x) - (ax^{n-1} + \dots + a_{n-1})F_1(x) = 0, \end{array} \right.$$

équations qui peuvent également se regarder comme combinaisons linéaires des équations

$$(\beta_1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0, & \\ xf(x) = 0, & \\ \dots\dots\dots, & \\ x^{m-n+1}f(x) = 0, & \\ x^{m-n}f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x^{m-n+1}f(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-1}f(x) = 0, & x^{n-1}F(x) = 0. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, les $m - n$ premières peuvent se remplacer par les équations

$$f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{m-n-1}f(x) = 0,$$

et les suivantes se posent sous la forme

$$(\alpha'_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Lambda x^{m-n} + \Lambda_1 x^{m-n-1} + \dots + \Lambda_{m-n}}{\alpha} = \frac{\Lambda_{m-n+1} x^{n-1} + \dots + \Lambda_m}{\alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n}, \\ \frac{\Lambda x^{m-n+1} + \Lambda_1 x^{m-n} + \dots + \Lambda_{m-n+1}}{\alpha x + \alpha_1} = \frac{\Lambda_{m-n+2} x^{n-2} + \dots + \Lambda_m}{\alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n}, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\Lambda x^{m-1} + \dots + \Lambda_{m-1}}{\alpha x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}} = \frac{\Lambda_m}{\alpha_n}. \end{array} \right.$$

18. Reprenons, au moyen de ces équations où ne figurent que x, x^2, \dots, x^{m-1} , le problème d'avoir pour $F(x) = 0, f(x) = 0$ une racine commune, une seule, et celui d'avoir p racines communes, p seulement.

Pour le premier problème, les équations (α') et (α_i) peuvent remplacer respectivement les équations (β) et (β_i) . Elles sont au nombre de m , elles dépendent de x, x^2, \dots, x^{m-1} , à les considérer comme équations du premier degré par rapport à ces quantités.

Pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient une racine commune et une seule, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients de x, x^2, \dots, x^{m-1} et des termes indépendants de x dans les m équations soit nul, et que celui des coefficients de x, x^2, \dots, x^{m-1} dans les $m - 1$ premières ne le soit pas; de sorte que la racine commune peut se déduire de celles-ci par l'élimination de x^2, \dots, x^{m-1} .

Considérons, en effet, au cas de $n = m$, simultanément les équations (α) et les équations (β) , après y avoir fait passer les exposants en indices, comme systèmes du premier degré.

Les deux premières équations $f(x) = 0, F(x) = 0$ du système (β) peuvent se remplacer par l'une d'elles et la première du système (α) . Comme la seconde du système α provient des quatre premières du système β , celles-ci équivalent ensuite aux deux premières du système (α) , et, par exemple, aux deux équations $f(x) = 0, xf(x) = 0$. De même, les six premières équations du système (β) peuvent être remplacées par les trois premières du système (α) et par $f(x) = 0, xf(x) = 0$.

$x^2 f(x) = 0$. En continuant ainsi, on obtient, à la place du système (β) , comme système équivalent, celui des équations (α) avec les m équations $f(x) = 0, xf(x) = 0, \dots, x^{m-1} f(x) = 0$. Or il se trouve là que les équations (α) ne contiennent pas $x^m, x^{m+1}, \dots, x^{2m-1}$, ou plutôt $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m-1}$, et que ces dernières inconnues, quand les équations (α) sont possibles, sont respectivement déterminées par $f(x) = 0, xf(x) = 0, \dots, x^{m-1} f(x) = 0$, de proche en proche.

Donc il faut et il suffit, pour que les équations (β) aient une solution et une seule, qu'il en soit de même des équations (α) ; donc x, x^2, \dots, x^{m-1} doivent pouvoir se déterminer par $m - 1$ de ces équations (α) , et leur substitution dans la $m^{\text{ième}}$ donner une identité.

Comme, pour les équations (β) , $x_1, x_2, \dots, x_{2m-2}$ doivent s'obtenir par les $2m - 2$ premières équations, et que ces $2m - 2$ équations sont susceptibles d'être remplacées par un système où ne figure pas la dernière des équations (α) , on voit encore que les $m - 1$ premières équations du système (α) doivent déterminer x_1, x_2, \dots, x_{m-1} , tandis que l'équation de condition répond à ce que les valeurs de ces inconnues, ainsi déterminées, satisfont à la $m^{\text{ième}}$. Le déterminant des coefficients de x_1, x_2, \dots, x_{m-1} doit donc être différent de zéro pour les $m - 1$ premières équations (α) .

Au cas de $m > n$, les mêmes considérations s'appliquent aux équations (β_1) et aux équations (α_1) , puis (α'_1) . Les conclusions y sont les mêmes.

19. Pour le problème d'avoir p racines communes et p seulement, le système qui nous a occupé est, au cas de $m = n$,

$$(\beta_2) \quad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{m-p} F(x) = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant le système

$$(\alpha_2) \quad \begin{cases} Af(x) - aF(x) = 0, \\ (Ax + A_1)f(x) - (ax + a_1)F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ Ax^{m-p} + \dots + A_{m-p} f(x) - (ax^{m-p} + \dots + a_{m-p})F(x) = 0, \end{cases}$$

qui est, sous une autre forme,

$$\frac{A}{a} = \frac{A_1 x^{m-1} + \dots + A_m}{a_1 x^{m-1} + \dots + a_m},$$

$$\frac{Ax + A_1}{ax + a_1} = \frac{A_1 x^{m-2} + \dots + A_m}{a_1 x^{m-2} + \dots + a_m},$$

.....,

$$\frac{A x^{m-p} + \dots + A_{m-p}}{a x^{m-p} + \dots + a_{m-p}} = \frac{A_{m-p+1} x^{p-1} + \dots + A_m}{a_{m-p+1} x^{p-1} + \dots + a_m}.$$

Supposons les exposants passés en indices de part et d'autre; nous aurons deux systèmes d'équations du premier degré, le premier de $m + n - 2p + 2$ équations en $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$, le second de $m - p + 1$ équations en x_1, x_2, \dots, x_{m-1} .

A la place des deux premières équations du système (β_2) , on pourra prendre $f(x) = 0$ et la première équation du système (α_2) ; à la place des quatre premières du système (β_2) les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, et les deux premières du système (α_2) , et ainsi de suite. De là, au lieu des $2m - 2p$ premières équations du système (β_2) , les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-2}f(x) = 0$, et les $m - p$ premières du système (α_2) . Au lieu du système (β_2) , on peut prendre les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p}f(x) = 0$, avec le système (α_2) .

Mais comme, dans les équations (α_2) , il ne se trouve pour inconnues que x_1, x_2, \dots, x_{m-1} , et que $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m-p}$ se produisent de proche en proche dans les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p}f(x) = 0$, les expressions de $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m-1}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} , qui doivent pouvoir se déduire des $2m - 2p$ premières équations du système (β) , seront données par les $m - p$ premières du système (α) , puis leurs valeurs devront satisfaire à la dernière équation de ce système, quelles que soient les valeurs attribuées à x_1, x_2, \dots, x_{p-1} . Ensuite c'est par les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p}f(x) = 0$ que seront successivement déterminées les valeurs de $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m-p}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} .

Au cas de $m > n$, le système des $m - p + 1$ équations

$$(\alpha') \begin{cases} f(x) = 0, & xf(x) = 0, & \dots, & x^{m-n-1}f(x) = 0, \\ (\Lambda x^{m-n} + \dots + \Lambda_{m-n})f(x) - aF(x) = 0, \\ (\Lambda x^{m-n+1} + \dots + \Lambda_{m-n+1})f(x) - (ax + a_1)F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (\Lambda x^{m-p} + \dots + \Lambda_{m-p})f(x) - (ax^{n-p} + \dots + a_{n-p})F(x) = 0, \end{cases}$$

celles-ci pouvant se prendre sous la forme

$$\frac{\Lambda x^{m-n} + \dots + \Lambda_{m-n}}{a} = \frac{\Lambda_{m-n+1} x^{n-1} + \dots + \Lambda_m}{a_1 x^{n-1} + \dots + a_n},$$

$$\frac{\Lambda x^{m-n+1} + \dots + \Lambda_{m-n+1}}{ax + a_1} = \frac{\Lambda_{m-n+2} x^{n-2} + \dots + \Lambda_m}{a_2 x^{n-2} + \dots + a_n},$$

.....

$$\frac{\Lambda x^{m-p} + \dots + \Lambda_{m-p}}{ax^{n-p} + \dots + a_{n-p}} = \frac{\Lambda_{m-p+1} x^{p-1} + \dots + \Lambda_m}{a_{n-p+1} x^{p-1} + \dots + a_n},$$

se prête à des considérations et conclusions analogues relativement au système

$$(\beta') \begin{cases} f(x) = 0, \\ xf(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ x^{m-n-1}f(x) = 0, \\ x^{m-n}f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x^{m-n+1}f(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p}f(x) = 0, & x^{n-p}F(x) = 0. \end{cases}$$

20. D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que le déterminant des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m-1}$ dans les $m - p$ premières équations du système (α'_2) soit différent de zéro, et que les valeurs de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m-1}$, qui résultent de ces $m - p$ équations, substituées dans la dernière du système, y satisfassent, quelles que soient les valeurs de x, x^2, \dots, x^{m-1} .

L'élimination de x^{p+1}, \dots, x^{n-1} entre les $m - p$ premières équations conduira à l'équation des racines communes. On pourra effec-

tuer l'élimination en multipliant les équations respectivement par les multiplicateurs des coefficients de x^p dans le déterminant que forment les coefficients de $x^p, x^{p+1}, \dots, x^{m-1}$ dans ces équations, puis en ajoutant.

En résumé, les $m - p + 1$ équations à considérer étant constituées et ordonnées suivant les puissances décroissantes de x , si l'on y relève les coefficients de $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x^p$, et que, tour à tour, on y joigne ceux de $x^{p-1}, x^{p-2}, \dots, x, x^0$, on aura, en égalant à zéro les p déterminants d'ordre $m - p + 1$ que formeront ainsi les colonnes de coefficients, pourvu que le déterminant des coefficients de x^{m-1}, \dots, x^p dans les $m - p$ premières équations ne soit pas nul, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient tout au juste p racines communes, finies, déterminées.

Puis l'équation aux racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le polynôme de degré p , où les coefficients de x^p, x^{p-1}, \dots, x^0 seront les déterminants formés par les coefficients de x^{m-1}, \dots, x^{p+1} , en y adjoignant tour à tour ceux de x^p, x^{p-1}, \dots, x^0 dans les $m - p$ premières équations considérées.

Le polynôme ainsi formé sera le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$, si les relations de condition sont satisfaites.

21. Il importe de remarquer que, si les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont p racines communes, sans en avoir davantage, le déterminant d'ordre $m + n$, dit de *Sylvester*, ou le déterminant de Cauchy ou de Bezout, d'ordre m , ainsi que les déterminants mineurs qui en dérivent, jusqu'à ceux de l'ordre $m + n - 2p + 2$ d'un côté, de l'ordre $m - p + 1$ de l'autre inclusivement, sont tous nuls.

Considérons, en effet, en supposant $q < p$, le système d'équations

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots & \dots, \\ x^{m-q}f(x) = 0, & x^{m-q}F(x) = 0. \end{array}$$

D'après ce qui a été reconnu à l'occasion du procédé d'Euler, une combinaison linéaire de ces équations pourra être nulle, et cela même d'une infinité de manières.

En conséquence, si l'on y fait passer les exposants en indices et que l'on y applique ce qui a été fait au n° 8, en désignant $m + n - 2q + 2$ par N' , les multiplicateurs étant $M_1, M_2, \dots, M_{N'}$, la somme sera nulle identiquement moyennant $m + n - q + 1$ relations homogènes du premier degré par rapport à ces indéterminées, de sorte que le nombre des relations surpassera de $q - 1$ celui des multiplicateurs. Ces relations pouvant être satisfaites à la fois par des valeurs des multiplicateurs, si l'on prend N' de ces relations, n'importe comment, le déterminant des coefficients de $M_1, M_2, \dots, M_{N'}$ dans le groupe sera nul. Or les déterminants dont la nullité apparaît ainsi seront, en faisant varier q de $p - 1$ à 1, tous les déterminants mineurs en question et le déterminant Sylvester lui-même.

Le même fait s'étend aux équations de Cauchy, au moins comme conséquence de l'étude générale qui va suivre, des déterminants qui naissent des deux systèmes d'équations (α') et (β').

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

PREMIÈRE PARTIE.

La théorie des surfaces orthogonales et des coordonnées curvilignes a pris rang dans la Science par les beaux travaux de Lamé. Les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* contiennent une théorie complète des systèmes orthogonaux, l'étude de leurs propriétés géométriques et de leurs applications en Physique mathématique. Toutefois, si les recherches de Lamé ont mis en évidence un grand nombre de propriétés des surfaces orthogonales, il faut reconnaître que, jusqu'à ces derniers temps, le nombre des systèmes orthogonaux connus était assez limité. Dans un Mémoire inséré au tome LIV des *Comptes rendus*, M. O. Bonnet a proposé une nouvelle méthode de recherche différente de celle de Lamé, et reposant sur des équations beaucoup plus simples. Décomposant le problème en deux, M. Bonnet cherche d'abord les directions des normales aux surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. A cet effet, il exprime les neuf cosinus déterminant les directions des normales aux trois surfaces qui se coupent en un point au moyen des trois angles d'Euler, θ , φ , ψ , et il trouve que ces angles

satisfont aux trois équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \psi \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \cos \psi \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = 0, \\ \cos \psi \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} - \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0, \\ \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} = 0, \end{array} \right.$$

où ρ, ρ_1, ρ_2 désignent les paramètres des trois familles de surfaces du système orthogonal.

Le système d'équations précédent est assurément très-simple. L'auteur prouve que, en considérant ψ comme une fonction de φ, ρ, ρ_1 , cette fonction ψ satisfera à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont l'intégration entraînerait celle du système (1). Il ne restera plus alors qu'à chercher les quantités désignées par Lamé sous le nom de H, H_1, H_2 . Chacune d'elles satisfait à trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration amènera trois fonctions arbitraires d'une variable, et sera par conséquent incomparablement plus facile que celle du système (1), qui doit introduire trois fonctions arbitraires de deux variables indépendantes.

Les recherches de M. Bonnet ont eu, comme on le voit, pour résultat de donner des notions précises sur l'ordre de difficulté de la détermination des systèmes orthogonaux. Ce problème, exigeant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à trois variables indépendantes, apparaissait comme étant beaucoup plus difficile que la plupart des autres questions de la Géométrie infinitésimale, la recherche des surfaces applicables, des surfaces minima, etc.

Dans un travail inséré au tome III de ce Recueil (1^{re} série), j'ai obtenu une réduction nouvelle du problème à l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre. J'ai d'abord complété un peu le théorème de Dupin en montrant que, si deux familles de surfaces orthogonales se coupent suivant leurs lignes de courbure, il existe nécessairement une autre famille de surfaces les coupant à angle droit, et j'ai ensuite établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces, représentée par l'équation

$$\rho = \varphi(x, y, z),$$

appartienne à un système orthogonal, est que ρ satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont j'ai indiqué le mode de formation, mais sans développer les calculs.

La proposition que j'ai ainsi établie a souvent été confondue avec celle que l'on doit à M. Bonnet. Il est vrai que, comme celle de cet éminent géomètre, elle constitue une réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; mais il est très-facile de reconnaître, et il est intéressant, au point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles, de remarquer qu'elle n'en était nullement un corollaire. Un système d'équations aux dérivées partielles, servant à déterminer plusieurs fonctions, ne conduit pas nécessairement, par l'élimination de toutes les fonctions moins une, à une seule équation. Il aurait pu se faire que le paramètre ρ dût satisfaire à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre ou des ordres supérieurs. La seule conclusion qu'il y avait à tirer du résultat de M. Bonnet, c'est que l'intégration ne devait pas amener plus de trois fonctions arbitraires de deux variables.

Pour rendre encore plus sensible, par un exemple emprunté à cette théorie, la remarque précédente, supposons que, considérant x, y, z comme des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , on se propose de déterminer l'une des inconnues x . C'est un problème que personne, je crois, ne s'est encore proposé; mais, précisément parce qu'il n'a pas été traité, on ne peut affirmer *a priori* que x , considérée comme fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , devra satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

L'équation du troisième ordre, dont j'avais démontré l'existence et indiqué le mode de formation, a d'abord été calculée par M. Cayley dans le tome LXXV des *Comptes rendus*. A cette occasion j'ai fait connaître une méthode pour obtenir cette équation, que je vais d'abord développer ici, en présentant plusieurs remarques nouvelles et démontrant plusieurs résultats que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Comptes rendus*, t. LXXVI, LXXXIII et LXXXIV. Ce sera l'objet de la première Partie de ce travail.

§ I. — *Définition d'une opération différentielle et formules qui s'y rapportent.*

Considérons des fonctions u, v, w, α de n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n . Je désignerai par le symbole δ_u l'opération suivante :

$$(1) \quad \delta_u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

que l'on peut écrire sous la forme plus simple

$$(2) \quad \delta_u = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

en convenant d'adopter les notations suivantes, qui seront employées dans la suite,

$$(3) \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \quad u_{ikl} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}, \quad \dots$$

Il résulte immédiatement, de la définition de u , que l'on a

$$(4) \quad \delta_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$(5) \quad \delta_u v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \delta_r u,$$

$$(6) \quad \delta_u (\alpha\beta) = \alpha \delta_u \beta + \beta \delta_u \alpha,$$

et, plus généralement,

$$(7) \quad \delta_u \pi (\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \pi'_\alpha \delta_u \alpha + \pi'_\beta \delta_u \beta + \pi'_\gamma \delta_u \gamma + \dots$$

$\pi'_\alpha, \pi'_\beta, \dots$ désignant les dérivées de u par rapport à α, β, \dots

Remarquons encore l'identité suivante, fort simple, et qui nous sera très-utile :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_u v) = \delta_u v_i + \delta_r u_i.$$

Cette formule contient des dérivées secondes. En voici une plus générale du même genre.

Posons

$$(9) \quad \begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & v \\ u \end{pmatrix} = \sum_i \Sigma_k v_i w_k u_{ik},$$

on trouvera, par un calcul facile,

$$(10) \quad \delta_r \delta_u u = \delta_r \delta_u \omega = \begin{pmatrix} \nu \omega \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu u \\ \omega \end{pmatrix},$$

et de même

$$\begin{aligned} \delta_r \delta_u \nu &= \begin{pmatrix} \omega u \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu \omega \\ u \end{pmatrix}, \\ \delta_u \delta_r \omega &= \begin{pmatrix} u \nu \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \omega \\ \nu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(11) \quad \delta_r \delta_u u + \delta_r \delta_u u - \delta_u \delta_r \omega = 2 \begin{pmatrix} \nu \omega \\ u \end{pmatrix} = 2 \sum_i \sum_k \nu_i \omega_k u_{ik}.$$

J'applique maintenant ces formules, tout à fait générales, à des hypothèses particulières.

Supposons que les fonctions ν , ω satisfassent aux équations

$$(12) \quad \delta_u \nu = 0, \quad \delta_u \omega = 0,$$

alors je vais établir que, si l'on a une relation quelconque entre les dérivées du premier ordre ν , ω et d'autres fonctions quelconques, on pourra toujours, pour la différentiation, en déduire une relation du même genre, c'est-à-dire ne contenant que les dérivées premières de ν , ω . Soit

$$\pi(\nu_i, \dots, \omega_k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0,$$

on aura, en appliquant la formule (7),

$$(13) \quad 0 = \delta_u \pi = \sum \frac{\partial \pi}{\partial \nu_i} \delta_u \nu_i + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \omega_k} \delta_u \omega_k + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} \delta_u \alpha.$$

Les deux premiers termes du second membre contiennent seuls des dérivées du second ordre de ω ; mais, en appliquant la formule (8) et tenant compte des conditions (12), on a

$$\delta_u \nu_i = -\delta_r u_i, \quad \delta_u \omega_k = -\delta_r u_k.$$

La formule (13) devient donc

$$(14) \quad 0 = -\sum \frac{\partial \pi}{\partial \nu_i} \delta_r u_i - \sum \frac{\partial \pi}{\partial \omega_k} \delta_r u_k + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} \delta_u \alpha,$$

et, sous cette forme, toutes les dérivées secondes de ν , ω sont éliminées. C'est ce qu'il fallait établir.

En appliquant le même procédé à la nouvelle équation, on voit que, par des différentiations successives, on pourra obtenir autant d'équations qu'on le voudra, contenant seulement les dérivées premières de v , w , et, par suite, éliminer complètement ces dérivées par la combinaison des équations obtenues.

Examinons en particulier le cas où il existe entre v , w une relation de la forme

$$(15) \quad \Sigma_i \Sigma_k A^{ik} v_i w_k = 0,$$

où les coefficients A^{ik} sont des fonctions quelconques ne contenant pas v , w ; nous obtiendrons, en appliquant la formule (14), la nouvelle relation

$$(16) \quad \Sigma \Sigma v_i w_k (\delta_u A^{ik} - \Sigma_k A^{ik} u_{kh} - \Sigma_k A^{ik} u_{ik}) = 0,$$

de forme semblable à celle d'où on l'a déduite.

§ II. — *Application à la formation de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le paramètre d'une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal.*

Considérons trois familles de surfaces, et désignons par u , v , w les paramètres de chaque famille. Pour que le système formé par ces trois familles soit orthogonal, il faudra que l'on ait

$$(17) \quad \delta_v w = 0, \quad \delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0.$$

Nous supposons les axes rectangulaires, et nous mettons x , y , z à la place de x_1 , x_2 , x_3 .

Les fonctions v , w satisfont aux deux équations

$$\delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0,$$

et il y a, entre leurs dérivées, la relation

$$\delta_v w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$$

En appliquant à cette relation le procédé indiqué dans l'article précédent, et qui, de l'équation (15), nous a permis de déduire la for-

mule (16), nous obtenons la nouvelle relation

$$(18) \quad \begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma v_i w_k u_{ik} = 0.$$

Cette formule résulterait aussi de l'identité (11), où le premier membre devient nul, en vertu des relations d'orthogonalité.

Les équations (17), (18) suffisent à déterminer les rapports des dérivées de v , w , et elles expriment, comme on sait, que les surfaces v , w coupent les surfaces u suivant les lignes de courbure de ces dernières.

De l'équation (18) déduisons encore une nouvelle équation ne contenant que les dérivées premières de v , w . L'équation (18) devient identique à l'équation (15) si l'on pose

$$A^i = u_{ik}.$$

L'application de la formule (16) nous donnera donc la nouvelle équation

$$(19) \quad \Sigma_i \Sigma_k v_i w_k (\partial_u u_{ik} - 2 \Sigma_k u_{ik} \dot{u}_{ik}) = 0.$$

Les équations (17), (18), (19) suffisent maintenant à l'élimination des dérivées premières de v , w . Elles vont ainsi nous conduire à une équation du troisième ordre à laquelle devra satisfaire le paramètre u , considéré comme fonction de x , y , z ; mais, auparavant, je vais démontrer que cette équation, qui est évidemment nécessaire, est aussi suffisante, et, pour cela, je substituerai, au raisonnement donné dans mon premier Mémoire, le suivant, qui est moins élémentaire, mais qui nous servira pour le cas de n variables, traité dans la deuxième Partie.

Les équations (17) et (18) déterminent complètement les rapports des dérivées v , w . Si on les supposait résolues, elles nous donneraient, par exemple pour v , un système de la forme

$$(20) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

L , M , N étant des fonctions de x , y , z connues lorsque u est donné. On peut dire qu'il faut, et il suffit, pour que le système précédent ne

soit pas impossible, que les relations qu'on obtient en le différentiant, par rapport à x, y, z , et en éliminant les dérivées secondes de v , soient des conséquences du système précédent; mais, à cette remarque évidente, on peut ajouter la suivante : les relations qu'on obtient en différentiant le système ne suffisent pas à déterminer les dérivées secondes de v en fonction des dérivées premières. En éliminant ces dérivées, on trouvera la condition d'intégrabilité

$$L \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) + M \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) + N \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0,$$

et il restera cinq équations distinctes entre les dérivées secondes de v qui les feront toutes connaître si l'on donne arbitrairement l'une d'elles. Il était clair, d'ailleurs, *a priori*, que l'on ne pouvait déterminer ces dérivées secondes, puisque le système (20) ne change pas si l'on y remplace v par $\varphi(v)$, ce qui permet de donner une valeur arbitraire à l'une des dérivées secondes.

Ce point étant admis, il est inutile, pour trouver les conditions d'intégrabilité des équations qui déterminent les rapports des dérivées de v, w , de résoudre les équations (17), (18). Il suffira de différentier successivement, par rapport à x, y, z , ces quatre équations, et d'éliminer les dérivées secondes de v, w . Il devra y avoir dix équations distinctes contenant ces dérivées secondes; les autres, d'où l'on aura chassé les dérivées secondes, devront être toutes satisfaites en vertu des équations (17), (18). Or, en différentiant ces quatre équations, on obtient douze équations dont la combinaison nous a déjà donné les formules (18), (19). Les dix équations restantes seront celles d'où l'on ne peut plus faire disparaître les dérivées secondes, d'après la remarque précédente. Ainsi les conditions d'intégrabilité sont données par les deux équations (18), (19). L'une d'elles (18), faisant partie du système proposé, sera toujours satisfaite, et il suffira que l'équation (19) soit vérifiée par les valeurs des dérivées déduites du système (17), (18).

Cette méthode montre bien pourquoi les deux conditions d'intégrabilité pour les fonctions v, w se réduisent à une seule. L'une d'elles fait partie du système qui sert à la définition des fonctions v, w .

L'élimination des dérivées de v, w peut se faire de la manière sui-

vante. Posons, pour abrégér,

$$(21) \quad A_{ik} = \delta_{ik} u_i - 2 \delta_{ik} u_k = u_1 u_{ik} + u_2 u_{ik} + u_3 u_{ik} - 2(u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} u_{k3});$$

nous aurons d'abord les trois équations

$$(22) \quad \begin{cases} v_1 \omega_1 + v_2 \omega_2 + v_3 \omega_3 = 0, \\ v_1 \omega_1 u_{11} + \dots + (v_1 \omega_2 + v_1 \omega_3) u_{12} + \dots = 0, \\ v_1 \omega_1 A_{11} + \dots + (v_1 \omega_2 + v_3 \omega_1) A_{12} + \dots = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne contenant que les combinaisons $v_i \omega_i$, $v_i \omega_k + v_k \omega_i$ symétriques par rapport à v , ω , formons-en trois autres semblables. Pour cela, nous emploierons les équations

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0, \\ u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + u_3 \omega_3 &= 0, \end{aligned}$$

et nous les ajouterons, après les avoir multipliées respectivement par ω_i , v_i , i recevant les valeurs 1, 2, 3. Nous obtenons ainsi

$$(22 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 2v_1 \omega_1 u_{11} + (v_1 \omega_2 + \omega_1 v_2) u_{12} + (v_1 \omega_3 + \omega_1 v_3) u_{13} = 0, \\ (v_1 \omega_2 + v_2 \omega_1) u_{11} + 2v_2 \omega_2 u_{22} + (v_2 \omega_3 + v_3 \omega_2) u_{23} = 0, \\ (v_1 \omega_3 + v_3 \omega_1) u_{11} + (v_2 \omega_3 + v_3 \omega_2) u_{22} + 2v_3 \omega_3 u_{33} = 0. \end{cases}$$

Éliminons maintenant les combinaisons $v_i \omega_i$, $v_i \omega_k + v_k \omega_i$ entre ces trois équations et les équations (22), nous aurons l'équation finale

$$(23) \quad S = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est, comme on le voit, linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre, du troisième degré par rapport à celles du second, du quatrième par rapport à celles du premier. Elle ne contient ni la fonction, ni les variables indépendantes. Si l'on écrit à part et que l'on désigne par K les termes qui contiennent les dérivées du troisième ordre, elle est de la forme

$$(24) \quad S = K - \Omega = 0,$$

où K n'est plus que du premier degré par rapport aux dérivées du second ordre, et Ω du troisième degré par rapport à celles du premier ordre.

Comme vérification, retrouvons d'abord l'équation donnée pour la première fois par M. Bouquet. Supposons que l'on cherche les solutions de la forme

$$u = X + Y + Z,$$

où X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z respectivement. A_{ik}, u_{ik} seront nuls toutes les fois que i sera différent de k . On aura

$$A_{11} = X'X'' - 2X''^2, \quad u_{11} = X'', \quad \dots,$$

et l'équation se réduira à la suivante :

$$S = 2X'Y'Z' \begin{vmatrix} X'X'' - 2X''^2 & Y'Y'' - 2Y''^2 & Z'Z'' - 2Z''^2 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

ce qui est conforme au résultat de M. Bouquet.

Comme nouvelle vérification, supposons que l'on choisisse un système d'axes pour lequel on ait

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{23} = 0,$$

c'est-à-dire pour lequel les axes des y et des z sont les tangentes aux lignes de courbure de la surface u en un point. Il restera

$$(25) \quad S = u_1^3 (u_{22} - u_{33}) (u_1 u_{23} - 2u_{12} u_{13}),$$

ce qui est conforme à un résultat obtenu par M. Puiseux dans son *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 335, 2^e série).

L'équation précédente donne la forme la plus simple à laquelle on puisse, par un choix convenable des axes, réduire l'équation proposée. Les deux fonctions que nous avons appelées K et Ω prennent alors les expressions

$$(26) \quad \begin{cases} K = u_1^3 (u_{22} - u_{33}) u_{123}, \\ \Omega = 2u_1^3 (u_{22} - u_{33}) u_{12} u_{13}. \end{cases}$$

Sous cette forme réduite, on voit qu'elles ont une existence indépen-

dante et que, si l'on remplace u par $\varphi(u)$, elles se reproduisent séparément multipliées par $\varphi'(u)$. Elles sont nulles toutes les deux si la famille des surfaces u se compose soit de sphères ou de plans, soit de surfaces parallèles. Il serait facile d'établir la réciproque; mais je négligerai l'examen de cette question pour m'attacher à une conséquence plus importante qui résulte de cette forme réduite.

Posons

$$(27) \quad \frac{1}{H} = V = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

L'expression

$$(28) \quad \sum v_i \omega_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = \begin{pmatrix} v\omega \\ H \end{pmatrix}$$

se reproduit évidemment quand on change les axes. Cela résulte de l'expression (11) du symbole $\begin{pmatrix} v\omega \\ u \end{pmatrix}$ au moyen des δ . Remplaçons $v_i \omega_i$, $v_i \omega_k + v_k \omega_i$ par leurs expressions déduites des formules (22 bis) et des deux dernières (22), et nous obtiendrons un déterminant

$$(29) \quad T = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix},$$

où les symboles H_{ik} désignent les dérivées secondes de H , qui se reproduira quand on changera les axes.

Voyons ce qu'il devient lorsqu'on choisit le système d'axes déjà indiqué, pour lequel on a

$$u_2 = u_3 = u_{23} = 0.$$

On trouve alors

$$T = u_1^2 (u_{22} - u_{33}) H_{23} = \frac{H^3}{2} u_1^2 (u_{22} - u_{33}) (2u_{12}u_{13} - u_1 u_{123}).$$

On a donc l'identité

$$(30) \quad T = -\frac{1}{2} S H^3,$$

et l'on voit que l'équation aux dérivées partielles du problème peut aussi s'écrire

$$(31) \quad T = 0.$$

Nous démontrerons ce résultat par une autre méthode, ne reposant pas sur un choix particulier des axes, dans le cas des systèmes orthogonaux à n variables. Il est donc inutile de donner ici une autre démonstration.

Dans la nouvelle forme irrationnelle, le déterminant T a ses trois premières lignes composées avec les dérivées des trois fonctions

$$H, \quad u, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on pourrait de même remplacer les trois dernières lignes par celles qui seraient formées avec les dérivées des trois fonctions

$$ux, \quad uy, \quad uz.$$

Plus généralement, si v_1, v_2, \dots, v_6 désignent six fonctions distinctes comprises dans le type suivant :

$$(32) \quad v_i = \varphi_i(u)H + \alpha_i(u)(x^2 + y^2 + z^2) + \beta_i(u)x + \gamma_i(u)y + \delta_i(u)z + \zeta_i(u),$$

l'équation pourra s'écrire, en égalant à zéro le déterminant formé avec les dérivées secondes,

$$(33) \quad \sum \pm \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v_4}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 v_5}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 v_6}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ce résultat se démontre aisément au moyen de combinaisons de lignes horizontales du déterminant T . On en déduit une première conséquence, c'est que l'équation sera vérifiée si l'on annule une des fonctions v_i , c'est-à-dire si l'on pose

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \\ &= a(x^2 + y^2 + z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a_1, \end{aligned} \right.$$

a, b, c, h, a_1 étant des fonctions quelconques de u . Toutes les fonctions

qui satisferont à cette équation du premier ordre donneront des familles de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Nous allons indiquer d'abord comment on intègre l'équation aux dérivées partielles (34), et comment on en déduit des systèmes orthogonaux contenant quatre fonctions arbitraires d'une seule variable, et dont peut faire partie une surface quelconque.

§ III. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont toutes les solutions donnent une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal.*

La présence des fonctions arbitraires a, b, c, h, a_1 de u dans l'équation (34) semble devoir empêcher l'intégration; cependant nous allons voir qu'on peut trouver une intégrale complète de cette équation.

A cet effet, nous allons rechercher si elle peut être satisfaite en prenant pour u le paramètre d'une famille de sphères représentées par l'équation

$$(34 \text{ bis}) \quad \alpha(x^2 + y^2 + z^2) - 2\beta x - 2\gamma y - 2\delta z + \alpha_1 = 0,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1$ sont des fonctions de u . Si de cette équation on déduit les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, on trouvera

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{4(\alpha x - \beta)^2 + 4(\alpha y - \gamma)^2 + 4(\alpha z - \delta)^2}{[\alpha'(x^2 + y^2 + z^2) - 2\beta'x - 2\gamma'y - 2\delta'z + \alpha_1']^2},$$

α', β', \dots désignant les dérivées par rapport à u de α, β, \dots . Si l'on tient compte de l'équation (34 bis) pour simplifier le numérateur du second membre, on trouvera

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{\frac{\alpha'}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \beta'x - \gamma'y - \delta'z + \frac{\alpha_1'}{2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha\alpha_1}},$$

équation qui est de la forme même de l'équation à intégrer (34). En écrivant que les coefficients sont égaux dans les équations, nous aurons

$$(35) \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{du} = 2\lambda a, \quad \beta' = \frac{d\beta}{du} = 2\lambda b, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{du} = 2\lambda c, \quad \delta' = \frac{d\delta}{du} = 2\lambda h, \quad \alpha_1' = \frac{d\alpha_1}{du} = 2\lambda a_1,$$

en posant, pour abrégér,

$$(36) \quad \lambda = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha\alpha_1}.$$

On voit, dès à présent, que les équations (35), (36) détermineront α , β , γ avec assez de constantes arbitraires pour que l'on soit assuré d'avoir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles proposée (34).

L'intégration de ces équations aux dérivées ordinaires (35) amènera cinq constantes arbitraires qui se réduiront à quatre distinctes en vertu de l'homogénéité de ces équations. On aura donc une intégrale complète à quatre constantes, ce qui est plus que suffisant pour l'intégration générale de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Je ferai d'abord une remarque sur le système des équations différentielles ordinaires (35), (36), qui, au premier abord, paraît si compliqué. En différentiant l'équation (36), on trouve

$$(37) \quad \frac{d\lambda}{du} = b\beta + c\gamma + d\delta - \frac{\alpha\alpha_1}{2} - \frac{a\alpha_1}{2},$$

et, cette équation étant substituée à la formule (36), il reste un système

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = 2\lambda a, & \frac{d\beta}{du} = 2\lambda b, & \frac{d\gamma}{du} = 2\lambda c, & \frac{d\delta}{du} = 2\lambda h, \\ \frac{d\alpha_1}{du} = 2\lambda a_1, & \frac{d\lambda}{du} = b\beta + c\gamma + d\delta - \frac{a_1}{2}\alpha - \frac{a}{2}\alpha_1, \end{cases}$$

entièrement composé d'équations linéaires, et l'on sait combien cette propriété facilite l'intégration. A la vérité, ce système est un peu plus général que le proposé. Une de ses intégrales est

$$\lambda^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + \alpha\alpha_1 = C;$$

il faudra poser $C = 0$ pour obtenir l'équation (36).

Supposons que l'on ait intégré complètement le système (38), on obtiendra, en substituant les valeurs de α , β , ... dans l'équation (35), une famille de sphères dont l'équation sera de la forme

$$(39) \quad C_1 S_1 + C_2 S_2 + \dots + C_6 S_6 = 0,$$

C_1, \dots, C_6 désignant les constantes arbitraires. En exprimant que

l'équation (36) est satisfaite, on trouvera entre C_1, \dots, C_6 une relation homogène du second degré

$$\varphi(C_1, C_2, \dots, C_6) = 0,$$

ce qui réduira, en tenant compte de l'homogénéité, à quatre le nombre de celles qui figurent dans l'équation (39).

Si les fonctions a, b, c, h, a_i sont données à l'avance, il est impossible d'intégrer d'avance le système (38); mais je vais montrer que, conformément à ce qui arrive dans des cas analogues, on peut mettre les fonctions arbitraires *sous une forme telle, que l'intégration puisse se faire complètement.*

A cet effet, nous allons d'abord leur donner une forme plus symétrique. Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon + i\varphi, & a &= \frac{e + if}{2}, \\ \alpha_i &= -\varepsilon + i\varphi, & a_i &= \frac{-e + if}{2}; \end{aligned}$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$, elles deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{du} = \lambda e, & \quad \frac{d\varphi}{du} = \lambda f, & \quad \frac{d\beta}{du} = \lambda b, & \quad \frac{d\gamma}{du} = \lambda c, & \quad \frac{d\delta}{du} = \lambda h, \\ \lambda^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \varepsilon^2 + \varphi^2, \end{aligned}$$

et elles rentrent dans le système général suivant :

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{du} = \lambda a_i, & \frac{dx_2}{du} = \lambda a_2, & \dots, & \frac{dx_n}{du} = \lambda a_n, \\ \lambda^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \end{cases}$$

où l'on aura à supposer $n = 5$.

Étudions ce système plus général et prouvons que l'on peut assigner aux fonctions a_1, \dots, a_n de u des formes telles, que les intégrales puissent être trouvées.

Posons

$$b_i = \int a_i du, \quad \dots, \quad b_n = \int a_n du,$$

et choisissons, à la place des inconnues x_i , les inconnues y_i liées aux précédentes par les relations

$$x_i = \lambda(b_i - y_i), \quad x_2 = \lambda(b_2 - y_2), \quad \dots, \quad x_n = \lambda(b_n - y_n).$$

En différentiant, nous trouverons le système

$$(41) \quad \frac{dy_1}{y_1 - b_1} = \frac{dy_2}{y_2 - b_2} = \dots = \frac{dy_n}{y_n - b_n},$$

qui, joint à l'équation

$$(41 \text{ bis}) \quad (y_1 - b_1)^2 + \dots + (y_n - b_n)^2 = 1,$$

déduite de la dernière des équations (40), suffit à faire connaître les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n .

Or ce système (41) est identique à celui qui a été considéré par M. Bonnet (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 971), et l'on sait, par conséquent, que l'on pourra donner aux fonctions b_i une forme telle que l'intégration soit possible. Nous allons donner une démonstration nouvelle de cet important résultat, qui débute comme celle de M. Bonnet, mais qui en diffère à partir de la seconde transformation. A la place de l'unité nous mettrons même une fonction r^2 dans le second membre de l'équation (41), qui deviendra

$$(41 \text{ ter}) \quad (y_1 - b_1)^2 + \dots + (y_n - b_n)^2 = r^2.$$

Posons

$$(42) \quad db_1 = h d(kc_1), \quad db_2 = h d(kc_2), \quad \dots, \quad db_n = h d(kc_n).$$

On substituera ainsi aux fonctions b_i $n + 2$ fonctions c_i, h, k ; on pourra donc prendre h et k arbitrairement.

Substituons aux inconnues y les inconnues z , définies par les équations

$$(43) \quad y_i - b_i = h(z_i - kc_i),$$

on trouvera, pour les variables z , le système d'équations

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{z_1 - kc_1} = \frac{dz_2}{z_2 - kc_2} = \dots = \frac{dz_n}{z_n - kc_n}, \\ (z_1 - kc_1)^2 + \dots + (z_n - kc_n)^2 = \frac{r^2}{h^2}. \end{array} \right.$$

Supposons qu'on ait choisi h par la relation

$$(45) \quad \frac{r^2}{h^2} = k^2(c_1^2 + \dots + c_n^2),$$

et k par la condition

$$(46) \quad c_n = 1,$$

les formules (42) prendront la forme

$$(47) \quad \begin{cases} db_1 = \frac{r}{k \sqrt{1 + c_1^2 + \dots + c_{n-1}^2}} d(kc_1), \dots, \\ db_{n-1} = \frac{r}{k \sqrt{1 + c_1^2 + \dots + c_{n-1}^2}} d(-kc_{n-1}), \\ db_n = \frac{r}{k \sqrt{1 + c_1^2 + \dots + c_{n-1}^2}} dk, \end{cases}$$

et la dernière équation (44) deviendra

$$z_1^2 + \dots + z_n^2 - 2k(c_1 z_1 + \dots + c_{n-1} z_{n-1} + z_n) = 0.$$

Prenons comme nouvelles fonctions

$$(48) \quad t_1 = \frac{2z_1}{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2}, \quad \dots, \quad t_n = \frac{2z_n}{z_1^2 + \dots + z_n^2},$$

le système (44) se changera dans le suivant :

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{dt_1}{c_1} = \frac{dt_2}{c_2} = \dots = \frac{dt_{n-1}}{c_{n-1}} = dt_n, \\ c_1 t_1 + \dots + c_{n-1} t_{n-1} + t_n = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Ces nouvelles équations sont linéaires. On saura donc les intégrer complètement si l'on sait intégrer le système obtenu en supprimant le second membre $\frac{1}{k}$.

Il nous restera donc à traiter le système

$$(50) \quad \frac{dt_1}{c_1} = \frac{dt_2}{c_2} = \dots = \frac{dt_{n-1}}{c_{n-1}} = dt_n$$

avec la condition

$$(51) \quad c_1 t_1 + \dots + c_{n-1} t_{n-1} + t_n = 0.$$

Ce système admet une intégrale évidente

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \text{const.}$$

Il importe peu que nous mettions l'unité ou une constante quelconque dans le second membre à cause de l'homogénéité. Nous écrirons donc

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = 1.$$

Jusqu'ici notre méthode est la même que celle de M. Bonnet; mais, au lieu de continuer de la même manière, nous effectuerons la nouvelle et dernière substitution de variables

$$(52) \quad t_{n-1} = \frac{-2v_n}{v_1^2 + \dots + v_n^2}, \quad t_{n-2} = \frac{-2v_{n-1}}{v_1^2 + \dots + v_n^2}, \quad t_1 = \frac{-2v_1}{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

On obtient alors, à la place du système (50), le suivant :

$$(53) \quad \begin{cases} v_n = 1, \\ \frac{dv_1}{v_1 - c_1} = \frac{dv_2}{v_2 - c_2} = \dots = \frac{dv_{n-1}}{v_{n-1} - c_{n-1}}, \\ (v_1 - c_1)^2 + \dots + (v_{n-1} - c_{n-1})^2 = 1 + c_1^2 + \dots + c_{n-1}^2, \end{cases}$$

qui est tout pareil à celui qui nous a servi de point de départ, mais qui contient une variable de moins, en laissant de côté l'équation $v_n = 1$. En recommençant indéfiniment les mêmes opérations, on aura la solution complète du système proposé.

Il est donc établi qu'étant donnée l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a_1,$$

où a, b, \dots sont des fonctions arbitraires de u , on peut, en donnant à ces fonctions une forme convenablement choisie, obtenir une intégrale complète de cette équation, qui sera de la forme

$$(54) \quad C_1 S_1 + \dots + C_6 S_6 = 0,$$

où les constantes seront liées par une équation du second degré

$$\varphi(C_1, \dots, C_6) = 0.$$

En donnant à C_5, C_6 deux valeurs numériques arbitraires, il restera encore trois constantes indépendantes C_1, C_2, C_3 ; C_4 sera déterminé par l'équation précédente.

Soit

$$\omega(x, y, z; C_1, C_2, C_3; u) = 0$$

l'équation du système de sphères ainsi obtenu. L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles proposée s'obtiendra en posant

$$C_3 = f(C_1, C_2),$$

f étant une fonction arbitraire et éliminant C_1, C_2, C_3 entre les équations

$$(55) \quad \begin{cases} C_3 = f(C_1, C_2), \\ \varphi(x, y, z; C_1, C_2, C_3; u) = 1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} \frac{df}{dC_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} \frac{df}{dC_2} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire en cherchant pour chaque valeur de u l'enveloppe des sphères pour lesquelles les trois constantes sont liées par la relation

$$C_3 = f(C_1, C_2).$$

Or cette relation peut toujours s'obtenir en exprimant que les sphères correspondant à une valeur u_0 de u sont tangentes à une surface fixe (Σ). Cette surface fera donc partie de la famille ainsi obtenue, et il est ainsi démontré que l'on peut obtenir avec quatre fonctions arbitraires du paramètre u un système orthogonal comprenant une surface quelconque.

Le résultat actuel comprend celui que l'on connaît relativement aux systèmes composés de surfaces parallèles et à leurs transformées par rayons vecteurs réciproques. Comme application, j'indiquerai le cas où l'équation qu'il s'agit d'intégrer est

$$H = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2bx - 2cy - 2hz + a,$$

a, b, c, h, a , étant des constantes.

Les équations (35) et (36) s'intègrent alors sans difficulté, et une discussion très-simple conduit au résultat suivant, que l'on vérifiera sans peine et que j'ai déjà donné dans les *Comptes rendus*.

On obtient une famille de surfaces (Σ) faisant partie d'un système triple et admettant pour trajectoires orthogonales des cercles coupant à angle droit une sphère fixe (S). Si cette sphère (S) grandit indéfiniment, les trajectoires orthogonales deviennent des droites, et l'on a

une famille de surfaces parallèles. Si elle se réduit à un point, on a une famille, transformée par rayons vecteurs réciproques d'une famille de surfaces parallèles.

En dehors de ces deux cas exceptionnels, voici comment on peut engendrer les surfaces qui, associées à une surface donnée à l'avance (Σ'), constituent la famille cherchée. On mènera des sphères (S') tangentes à (Σ'), et coupant la sphère fixe (S) sous un angle constant α , d'ailleurs quelconque; puis, par l'intersection de ces sphères (S') et de (S), on mènera des sphères (S'') coupant (S) sous un angle constant quelconque β . L'enveloppe des sphères (S'') donnera l'une quelconque des surfaces que l'on doit associer à (Σ') pour former une famille du système orthogonal.

L'existence de ce système particulier avait déjà été reconnue par M. Ribaucour, mais la construction précédente est entièrement nouvelle.

On pourrait, au reste, traiter encore cette question en remarquant que l'équation à intégrer peut toujours, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques ou *inversion*, se ramener à la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{z^2},$$

dont on aperçoit immédiatement une intégrale complète

$$u = \alpha x + \beta y + \int \sqrt{\frac{1}{z^2} - \alpha^2 - \beta^2} dz + \gamma,$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires.

§ IV. — Remarques nouvelles sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

Nous avons vu que l'équation à laquelle satisfait le paramètre u peut se mettre sous la forme

$$v_1 w_1 H_{11} + (v_1 w_2 + v_2 w_1) H_{12} + \dots = 0,$$

où H désigne la fonction

$$H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}.$$

Si donc nous nous rappelons la signification de $\nu_1, \dots, \omega_1, \dots$, et qu'au lieu de ces dérivées nous introduisons des différentielles, dx, dy, dz désignant les différentielles relatives au déplacement suivant une ligne de courbure de la surface u , et $\delta x, \delta y, \delta z$ les différentielles se rapportant à l'autre ligne de courbure, l'équation du problème peut s'écrire

$$H_{11} dx \delta x + \dots + H_{12} (dx \delta y + dy \delta x) + \dots = 0,$$

ce qui équivaut, comme on sait, à l'équation

$$(56) \quad d \delta H - \frac{\partial H}{\partial x} d \delta x - \frac{\partial H}{\partial y} d \delta y - \frac{\partial H}{\partial z} d \delta z = 0,$$

où d'ailleurs les variables indépendantes sont absolument quelconques.

Si l'on suppose que l'on ait pris pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure en un point, on retrouve l'équation

$$(57) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0,$$

donnée par M. Maurice Levy; mais cet habile géomètre l'a démontrée directement sans donner la formule (56), écrite dans un système de variables quelconques.

Nous allons faire des applications de cette équation générale et retrouver d'abord l'équation remarquable que M. Levy a donnée au tome LXXVII des *Comptes rendus*.

Supposons que, prenant x, y, u comme variables indépendantes, on veuille trouver l'équation à laquelle satisfait z considérée comme fonction de ces variables. On aura d'abord

$$(58) \quad H = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

p et q désignant, suivant l'usage, les dérivées de z , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

D'ailleurs, x, y étant indépendantes, on peut poser

$$d \delta x = 0, \quad d \delta y = 0,$$

et $d \delta z$ sera donné par l'équation

$$d \delta z = dp \delta x + dq \delta y = r dx \delta x + s (dx \delta y + dy \delta x) + t dy \delta y,$$

qui montre que $d\delta z$ sera aussi nul, puisque les directions des lignes de courbure sont conjuguées. L'équation (56) deviendra donc

$$d\delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dx \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} (dx \delta y + dy \delta x) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} dy \delta y = 0.$$

C'est l'équation de M. Levy. Il suffit d'y remplacer dx , δx , ... par les quantités qui leur sont proportionnelles. L'équation des lignes de courbure étant

$$dx^2[(1+p^2)s - pqr] + dx dy[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + dy^2[pqt - (1+q^2)s] = 0,$$

on aura

$$\frac{dy \delta y}{(1+p^2)s - pqr} = \frac{dx \delta y + dy \delta x}{(1+q^2)r - (1+p^2)t} = \frac{dx \delta x}{pqt - (1+q^2)s}$$

en vertu des relations entre les coefficients et les racines d'une équation. On aura donc pour l'équation cherchée

$$(59) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} [(1+q^2)s - pqt] + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} [(1+p^2)t - (1+q^2)r] \\ \quad \quad \quad + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} [pqr - (1+p^2)s] = 0, \end{cases}$$

ce qui est le résultat de M. Maurice Levy.

Pour abrégé, nous désignerons le premier membre de l'équation précédente sous la forme

$$(60) \quad A \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0.$$

Proposons-nous, comme nouvelle application, de chercher la surface la plus générale qui, en se déplaçant sans changer de forme, engendre une famille de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Nous prendrons des axes mobiles invariablement liés à cette surface, et par rapport auxquels elle aura toujours la même équation, et nous choisirons comme variables indépendantes u et les coordonnées relatives x , y . Les différentielles d , δ se rapportant au cas où u est constant, il importe peu que les axes soient mobiles quand u varie; l'équation du problème sera encore l'équation (60). L'expression seule de H changera, et nous allons la calculer avec les nouvelles variables.

Nous aurons souvent à faire le calcul de H avec des variables quel-

conques. Ce calcul est beaucoup simplifié par la remarque suivante : Supposons d'abord que l'on ait rapporté les points à des axes toujours fixes, et que l'on considère u comme fonction de x, y, z ; on aura

$$\frac{1}{H} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

On déduit de là que H est la valeur minimum de $\frac{ds}{du}$, ds désignant la différentielle de l'arc quand, partant d'un point M , on se déplace dans toutes les directions. Cette propriété de H va nous permettre de l'écrire dans toutes les hypothèses.

Dans le cas actuel, la surface est invariable de forme, et les axes se déplacent avec elle et changent avec u . En vertu des théorèmes sur le mouvement relatif, le déplacement absolu résulte de la composition du déplacement relatif du point et de celui qu'il aurait s'il était invariablement lié aux axes mobiles. Si donc $d'x, d'y, d'z$ désignent les variations des coordonnées relatives, si dx, dy, dz désignent les projections sur les axes du déplacement absolu, on aura des formules de la forme

$$\begin{aligned} dx &= d'x + (a + \beta z - \gamma y) du, \\ dy &= d'y + (b + \gamma x - \alpha z) du, \\ dz &= d'z + (c + \alpha y - \beta x) du, \end{aligned}$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ désignant les composantes des trois translations et des trois rotations par lesquelles on passe du système d'axes mobiles au système infiniment voisin. D'ailleurs, la surface u ne variant pas de forme, on a

$$d'z = p d'x + q d'y,$$

et, par suite,

$$dz - p dx - q dy = du [c - ap - bq + \alpha(\gamma + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(qx - py)].$$

On déduit de là la valeur minimum de $\frac{ds}{du}$, c'est-à-dire de H ,

$$(62) \quad H = \frac{c - ap - bq + \alpha(\gamma + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(qx - py)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

si donc on convient de poser, pour abrégé,

$$(63) \quad \Delta(\mu) = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

l'expression $\Delta\mu$ indiquant une opération à effectuer sur μ , l'équation aux dérivées partielles deviendra

$$(64) \quad c\Delta(r) - a\Delta(p) - b\Delta(q) + \alpha\Delta(y + qz) + \beta\Delta(x + pz) + \gamma\Delta(qx - py) = 0.$$

L'équation précédente doit être satisfaite, quel que soit u , et elle se décomposera généralement en plusieurs autres. Par exemple, si l'on veut une surface qui, dans un déplacement quelconqué, engendre une famille faisant partie d'un système triple, il faudra que les six équations que l'on obtient en égalant à zéro les coefficients de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ soient satisfaites. C'est ce qui a lieu pour les sphères et les plans. Si l'on ne veut considérer que des translations quelconques, il suffira que l'on ait

$$\Delta(r) = 0, \quad \Delta(p) = 0, \quad \Delta(q) = 0.$$

Dans tous les cas on voit que, si l'équation est satisfaite pour deux déplacements, elle le sera pour tous ceux qui résultent de leur composition. Cela résulte de sa forme, linéaire par rapport aux rotations et aux translations.

La surface contenant le plus d'arbitraires sera évidemment celle qui n'engendre que par un seul mouvement une famille de surfaces faisant partie d'un système triple. Pour une telle surface, les rapports de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes. Le mouvement de la surface est donc un mouvement hélicoïdal. Supposons que l'axe de ce mouvement ait été pris pour axe des z ; on aura

$$a = b = \alpha = \beta = 0, \quad c = k\gamma,$$

k désignant une constante, et l'équation aux dérivées partielles de la surface deviendra

$$(65) \quad \Delta(qx - py + k) = 0.$$

D'ailleurs, l'équation

$$\Delta\mu = 0$$

admettant toujours l'intégrale

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + kz + a_1,$$

comme il est facile de le vérifier, on voit qu'on aura des solutions particulières de l'équation (65) en posant

$$(66) \quad \frac{qx - py + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a.$$

Il est facile d'intégrer cette équation.

Prenons comme variables indépendantes les coordonnées polaires

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

elle deviendra

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \omega} + k\right)^2 = a^2 + a^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{a^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2,$$

et sous cette forme on aperçoit immédiatement qu'il y a une solution complète, somme d'une fonction de ρ et d'une fonction de ω . On trouve ainsi

$$z = h\omega + \frac{1}{a} \int \sqrt{(h+k)^2 - a^2 - \frac{a^2 h^2}{\rho^2}} d\rho + C,$$

h et C étant deux constantes, et de cette solution complète, qui représente un hélicoïde réglé, on déduira l'intégrale générale.

§ V. — Formation de l'équation aux dérivées partielles quand u est une fonction implicite de x, y, z .

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces était résolue par rapport à l'une des variables u ou z . Nous considérerons maintenant le cas, très-important pour les applications, où cette équation est de la forme

$$(68) \quad \varphi(x, y, z, u) = 0.$$

La quantité que nous avons désignée par H aura ici pour valeur

$$H = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

ou, en posant

$$(69) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi',$$

et adoptant les notations précédentes,

$$(70) \quad H = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}}.$$

Toutes les équations qui nous ont servi de point de départ,

$$\delta_u u = 0, \quad \delta_v u = 0, \quad \begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = 0,$$

subsistent sans modifications quand on y remplace u par φ et que, dans les dérivées, on traite u comme une constante. Ainsi l'on a

$$\delta_\varphi v = 0, \quad \delta_\varphi w = 0, \\ v_1 \omega_1 \varphi_{11} + (v_1 \omega_2 + v_2 \omega_1) \varphi_{12} + \dots = 0,$$

En effet, comme ces équations sont celles qui déterminent les directions des lignes de courbure et comme u est constant pour chaque surface, il importe peu que l'équation soit résolue ou non par rapport à u ; elle est toujours implicite par rapport aux variables x, y, z .

Quant à l'équation du troisième ordre, elle est toujours la même

$$v_1 \omega_1 H_{11} + (v_1 \omega_2 + \omega_1 v_2) H_{12} + \dots = 0;$$

mais ici, en prenant les dérivées secondes, on devrait considérer u comme fonction de x, y, z , et tenir compte des termes qui proviennent de ces dérivées. Or on verra très-facilement que ces termes donnent une somme nulle, en sorte que dans l'équation précédente on pourra supposer que les dérivées de H soient prises en laissant u constant. En éliminant v_i, ω_k , on trouvera comme précédemment

$$(71) \quad S' = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{22} & H_{13} & H_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{22} & \varphi_{13} & \varphi_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où toutes les dérivées doivent être prises, en laissant u constant. On voit qu'en définitive l'équation exprime une relation entre les dérivées partielles par rapport à x, y, z de deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$. Cette relation n'est pas d'ailleurs nécessairement identique, et il suffit qu'elle soit vérifiée en tenant compte de la relation qui lie u à x, y, z .

L'équation précédente, étant mise sous forme irrationnelle, devient à peu près inutile pour les calculs. Aussi vais-je calculer la même équation mise sous forme rationnelle. A cet effet, reprenons l'équation

$$\sum v_i \omega_k \varphi_{ik} = 0,$$

et appliquons-lui la méthode que nous avons suivie. Prenons le δ_u du premier membre. En tenant compte de l'identité

$$\delta_v \varphi_i + \delta_v v_i + (\delta_v \varphi') u_i = 0,$$

et en remplaçant u_i par $-\frac{\varphi_i}{\varphi'}$, on chassera toutes les dérivées secondes de v, ω , et, en supprimant quelques termes de somme nulle, on trouvera

$$(72) \quad \sum \sum B_{ik} v_i \omega_k = 0,$$

où l'on a

$$B_{ik} = \varphi' \sum_A \varphi_A \varphi_{iA} - \varphi'_{ik} \sum_A \varphi_A^2 - 2\varphi' \sum \varphi_{iA} \varphi_{kA} + \varphi'_A \sum \varphi_A \varphi_{ik} + \varphi'_i \sum \varphi_A \varphi_{kA}.$$

On obtiendra ainsi l'équation finale

$$(72) \quad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{13} & B_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{13} & \varphi_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est pas beaucoup plus compliquée que l'équation résolue par rapport à u . Ce résultat paraîtra intéressant si l'on songe au nombre de termes qu'aurait pu introduire le calcul des dérivées secondes et troisièmes de u défini comme fonction implicite.

En développant le déterminant, on trouvera

$$\begin{aligned} & \varphi_1^3 [B_{23}(\varphi_{23} - \varphi_{33}) + \varphi_{23}(B_{33} - B_{22})] + \dots \\ & + \varphi_1^2 \varphi_2 [2B_{13}\varphi_{23} - 2B_{23}\varphi_{21} + B_{22}\varphi_{13} - B_{13}\varphi_{22} + B_{13}\varphi_{33} - B_{33}\varphi_{13}] + \dots \\ & - \varphi_1^2 \varphi_3 [2B_{13}\varphi_{23} - 2B_{23}\varphi_{13} + B_{33}\varphi_{12} - B_{13}\varphi_{33} + B_{12}\varphi_{22} - B_{22}\varphi_{12}] + \dots \\ & + \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 [B_{11}(\varphi_{22} - \varphi_{33}) + B_{22}(\varphi_{33} - \varphi_{11}) + B_{33}(\varphi_{11} - \varphi_{22})] = 0. \end{aligned}$$

Les termes non écrits se déduisent des trois premiers par des permutations circulaires.

Faisons une application de l'équation précédente, et cherchons tous les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces à centre du second degré, ayant les mêmes plans principaux. Soit

$$(73) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$$

l'équation des surfaces où A, B, C sont des fonctions inconnues du paramètre u . En exprimant que l'équation précédente est satisfaite, on trouve

$$(74) \quad xyz \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \right) [(B - C)A dA + (C - A)B dB + (A - B)C dC] = 0.$$

On devra donc avoir, entre les trois fonctions A, B, C, la relation différentielle

$$(75) \quad (B - C)A dA + (C - A)B dB + (A - B)C dC = 0.$$

C'est l'équation obtenue par M. Maurice Levy dans un important Mémoire inséré au XLIII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. La méthode par laquelle nous l'obtenons sert de vérification à nos calculs.

L'équation différentielle précédente établissant une seule relation entre trois fonctions arbitraires d'une seule variable, on pourra y satisfaire en prenant pour B une fonction quelconque de A, et l'on aura ensuite à intégrer cette équation, qui deviendra une relation différentielle ordinaire entre A et B. Il y a donc un très-grand nombre de systèmes orthogonaux dont l'une des familles est composée de surfaces du second degré. M. Levy, dans le travail déjà cité, en a fait connaître un certain nombre; mais je vais montrer qu'on peut les trouver tous et

intégrer complètement l'équation différentielle à trois variables que nous venons d'obtenir.

On peut, en effet, l'écrire sous la forme

$$(76) \quad B(C - A) d(B - A) + C(A - B) d(C - A) = 0.$$

Supposons que $C - A$ soit le paramètre u . Posons

$$C - A = u,$$

et prenons arbitrairement

$$(77) \quad B - A = \varphi(u),$$

φ étant une fonction quelconque de u . L'équation différentielle (76) se réduira à l'équation finie

$$(78) \quad B(C - A) \varphi'(u) = C \varphi(u),$$

et les formules précédentes donneront

$$(79) \quad A = \frac{u \varphi(1 - \varphi')}{u \varphi' - \varphi}, \quad B = \frac{\varphi(u - \varphi)}{u \varphi' - \varphi}, \quad C = \frac{u \varphi'(u - \varphi)}{u \varphi' - \varphi},$$

φ' désignant la dérivée de φ , ce qui constitue la solution générale de l'équation proposée.

Appliquons, par exemple, ces formules à la recherche de tous les systèmes pour lesquels il y a entre les carrés des trois axes A, B, C une relation linéaire et homogène

$$mA + nB + pC = 0.$$

En substituant à la place de A, B, C leurs valeurs, nous aurons, pour déterminer φ , l'équation

$$m \frac{1 - \varphi'}{u - \varphi} + \frac{n}{u} + \frac{p \varphi'}{\varphi} = 0,$$

dont l'intégrale s'aperçoit immédiatement. Elle est

$$(u - \varphi)^m u^n \varphi^p = \text{const.}$$

On peut encore, au lieu de suivre la marche précédente, remarquer

que l'équation (76) peut être remplacée par le système suivant :

$$(80) \quad \begin{cases} A dA = (mA + n) du, \\ B dB = (mB + n) du, \\ C dC = (mC + n) du, \end{cases}$$

où m , n sont, soit des constantes, soit des fonctions de u . Supposons, par exemple, que l'on ait $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$, on trouvera, en intégrant,

$$A^2 = u^2 + \alpha, \quad B^2 = u^2 + \beta, \quad C^2 = u^2 + \gamma.$$

C'est un système dans lequel ce ne sont plus les différences des carrés des axes, mais celles de leurs quatrièmes puissances, qui sont constantes.

Quand on adopte ce dernier mode de solution, on trouve facilement que les deux autres familles complétant le système sont données par l'élimination de u entre les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 &= 0, \\ \frac{x^2}{A-t} + \frac{y^2}{B-t} + \frac{z^2}{C-t} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

où t est la solution la plus générale de l'équation

$$t dt = (mt + n) du,$$

la constante arbitraire introduite par l'intégration étant considérée comme le paramètre de la famille correspondante.

Dans le Mémoire que nous avons déjà cité, M. Maurice Levy a démontré cet important théorème que, si une famille de surfaces du second degré fait partie d'un système orthogonal, les plans principaux de ces surfaces sont les mêmes; par conséquent, les systèmes précédents, en y comprenant ceux qui sont formés avec des surfaces dépourvues de centre et qui en sont un cas limite, sont les seuls qu'on puisse former avec des surfaces du second degré. Je vais rattacher le théorème de M. Levy à une proposition plus générale et montrer que, si une famille de surfaces faisant partie d'un système triple est composée de surfaces ayant chacune un plan de symétrie, les plans de sy-

métrie de toutes ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains cas qui sont nettement définis par la démonstration elle-même.

Pour établir cette proposition, je ferai usage d'une propriété fondamentale, déjà signalée, de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre que nous avons trouvée. Cette équation peut être considérée comme établissant une relation entre les dérivées partielles de deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ prises par rapport à x, y, z seulement. On pourra donc, dans l'étude du problème, rapporter les surfaces à des axes qui seront variables quand on passera d'une surface à une autre, à la seule condition de calculer exactement $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$.

Supposons que la surface de paramètre u_0 ait été rapportée à des axes qui changeront lorsqu'on passera de cette surface à la voisine, de paramètre $u_0 + du_0$. Alors les coordonnées d'un point fixe (x, y, z) seront des fonctions de u dont les dérivées seront données par des équations de la forme

$$(81) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = qz - ry + \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = rx - pz + \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = py - qx + \gamma,$$

p, q, r étant les composantes des trois relations, et α, β, γ celles des translations quand on passe du système d'axes choisi au système infiniment voisin correspondant à la surface $u + du$. Soit donc

$$\varphi(x, y, z, u) = 0$$

l'équation de la surface rapportée à des axes mobiles. La dérivée du premier membre par rapport à u sera

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

ou

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta) + \varphi_3(py - qx + \gamma).$$

Telle est l'expression qu'il faudra mettre dans H à la place de φ' , ce qui donne

$$(82) \quad H = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta) + \varphi_3(py - qx + \gamma)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}},$$

et, en substituant cette valeur de H dans l'équation (71) ou dans la suivante :

$$d\delta H - H_1 d\delta x - H_2 d\delta y - H_3 d\delta z = 0,$$

on aura l'équation cherchée.

Cela posé, supposons qu'une surface de la famille ait un plan de symétrie qu'elle coupe suivant une courbe (C). En un point de la courbe (C) les directions des lignes de courbure sont : 1° celles de la tangente à la courbe C, définie par dx, dy quelconques, et $dz = 0$; 2° celles de la normale au plan pour laquelle

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0.$$

En substituant ces valeurs des différentielles dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} dy = 0.$$

Cette équation exprime évidemment que $\frac{\partial H}{\partial z}$ est constant en tous les points de la courbe (C). On a donc, pour tous les points de cette courbe,

$$(83) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = C.$$

Pour calculer $\frac{\partial H}{\partial z}$, nous remarquerons que la surface ayant pour plan de symétrie la courbe (C), son équation ne contient que les puissances paires de z . Toutes les dérivées de φ , prises une fois seulement par rapport à z , seront donc nulles pour tous les points de la courbe (C) et même de son plan. En utilisant cette remarque, on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(p\gamma - qx + \gamma)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}},$$

et, par conséquent,

$$(83) \quad [q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(p\gamma - qx + \gamma)]^2 = C^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

équation qui devra être vérifiée en tous les points de la courbe (C).

Supposons que la forme des surfaces choisies rende cette équation

impossible, il faudra supposer

$$(84) \quad p = 0, \quad q = 0, \quad \gamma = 0, \quad C = 0;$$

or les trois premières équations expriment que, lorsqu'on passera d'une surface à la surface infiniment voisine, le mouvement du système d'axes choisi sera tel que le plan des xy glisse sur lui-même. Si toutes les surfaces ont un plan de symétrie, et si, en outre, les conditions (84) sont toujours remplies, on voit que tous les plans de symétrie des surfaces d'un même système coïncideront.

Appliquons ces remarques aux surfaces du second degré. La section par le plan principal ayant pour équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

on devra avoir

$$[q\varphi_1 - p\varphi_2 + \varphi_{33}(py - qx + \gamma)]^2 = C^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

en tous les points de cette section, φ_{33} désignant la dérivée seconde, par rapport à z , du premier membre de l'équation de la surface, qui est nécessairement une constante. L'équation précédente exprime que les deux droites représentées par l'équation

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 \sqrt{-1} = 0$$

sont tangentes à la courbe, ce qui ne peut arriver, on s'en assure aisément, que si la section principale se réduit à un cercle ou à deux droites, c'est-à-dire si la surface est de révolution ou conique. On sait, en effet, que, dans ce cas, des surfaces peuvent faire partie d'un système orthogonal sans que leurs plans de symétrie coïncident. Laissons donc cette hypothèse de côté et faisons $C = 0$.

Supposons, en outre, la section rapportée à son centre et à ses axes, et représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 1 = 0,$$

alors, en désignant par 2α la valeur de φ_{33} , l'équation, qui doit être vérifiée, se réduira à

$$qax - pby + \alpha(py - qx + \gamma) = 0,$$

ce qui donne

$$q(a - \alpha) = 0, \quad p(b - \alpha) = 0, \quad \alpha\gamma = 0.$$

Si l'une des trois quantités α , $a - \alpha$, $b - \alpha$ était nulle, la surface serait soit cylindrique, soit de révolution. Écartons ces hypothèses, et nous trouverons

$$p = q = \gamma = 0,$$

c'est-à-dire que les équations (84) seront satisfaites. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Toutes les fois que des surfaces du second degré qui ne sont ni coniques, ni cylindriques, ni de révolution, forment une famille faisant partie d'un système triple, leurs plans principaux coïncident.

Revenons au cas général. On peut donner une interprétation élégante de l'équation (83).

Considérons la surface représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, z, u) = 0,$$

ayant pour plan principal le plan des xy , et menons-lui la normale en un point (x, y, z) . Elle aura pour équations

$$\frac{X - x}{\varphi_1} = \frac{Y - y}{\varphi_2} = \frac{Z - z}{\varphi_3},$$

X, Y, Z désignant les coordonnées variables, et le point où elle coupera le plan de symétrie sera défini par les formules

$$X = x - \frac{z\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Y = y - \frac{z\varphi_2}{\varphi_3}.$$

Si le pied de la normale se rapproche d'un point M de la courbe (C) , section de la surface par son plan de symétrie, z tendra vers zéro, $\frac{\varphi_3}{z}$ aura pour limite φ_{33} , et le point XY , défini par les équations précédentes, deviendra le centre de courbure correspondant à la section normale en M au plan de symétrie.

En appelant x', y' les coordonnées de ce centre, ρ le rayon de courbure, on aura donc

$$x' = x - \frac{\varphi_1}{\varphi_{33}}, \quad y' = y - \frac{\varphi_2}{\varphi_{33}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{\varphi_{33}},$$

et la formule (88) deviendra

$$(85) \quad py' - qx' + \gamma = C\rho,$$

ce qui veut dire que le rayon de courbure doit, ou bien être constant, si p et q sont nuls, ou bien être proportionnel à la distance du centre de courbure à une droite fixe du plan. Cette droite est d'ailleurs la caractéristique du plan, c'est-à-dire l'intersection du plan avec sa position infiniment voisine. On peut encore interpréter la condition précédente en remarquant que la sphère qui a pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure, c'est-à-dire l'une des deux sphères osculatrices à la surface, coupe, sous un angle constant, tout plan fixe passant par la caractéristique du plan de symétrie. Nous avons donc le théorème suivant :

Pour que des surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal et ont un plan de symétrie soient dans une position telle que ces plans ne coïncident pas, il est nécessaire que les sphères osculatrices à ces surfaces en tous les points de la section par le plan de symétrie, suivant la direction normale à ce plan, coupent, sous un angle constant, l'un quelconque des plans qui passent par une droite fixe du plan de symétrie, droite qui est alors l'intersection de ce plan et du plan de symétrie de la surface infiniment voisine.

Appliquons cette proposition à la recherche des systèmes formés avec des surfaces de révolution, et prenons pour axe des x l'axe de la surface; alors y' sera nul, et l'équation (85) deviendra

$$C\rho = \gamma - qx'.$$

En général, il n'y a pas une relation aussi simple entre la normale ρ à la courbe méridienne et l'abscisse du point où elle coupe l'axe. Il faut donc que l'on ait

$$C = \gamma = q = 0.$$

Il n'y a donc pas de composante normale à l'axe de la rotation et de la translation du système, puisque la relation précédente a lieu pour tous les méridiens, c'est-à-dire que l'axe demeure fixe et est le même pour toutes les surfaces.

Mais supposons qu'il existe entre ρ et x' une relation de la forme

$$C\rho = \gamma - qx'.$$

Si $C = 0$, on a une sphère; si $q = 0$, on a soit une sphère, soit un cylindre de révolution; enfin, dans les autres cas, on a un méridien rectiligne, c'est-à-dire un cône de révolution : ces cas d'exception étaient faciles à prévoir. On sait, par exemple, que l'on peut former un système triple avec une famille de cônes de révolution quelconques assujettis seulement à avoir le même sommet. La proposition générale établie plus haut est donc confirmée par cette application.

Une proposition analogue à la précédente peut être démontrée dans le cas où l'on a une famille de surfaces qui sont chacune anallagmatiques par rapport à une sphère particulière. Chaque surface coupe la sphère qui lui correspond à angle droit et suivant une ligne de courbure (C). Les directions des lignes de courbure en un point de cette courbe sont la tangente à la courbe et le rayon de la sphère. Si l'on prend des axes qui changent quand on passe d'une surface à l'autre et soient assujettis à avoir pour origine le centre de la sphère par rapport à laquelle la surface est anallagmatique, l'équation du troisième ordre prendra la forme

$$d\delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x dx + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} (x dy + y dx) + \dots = 0,$$

dx, dy, dz indiquant des déplacements suivant la courbe (C). L'équation peut s'écrire

$$d\left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + z \frac{\partial H}{\partial z} - H\right) = 0,$$

et, par conséquent, pour tous les points de la courbe (C), on aura

$$(86) \quad H - x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y} - z \frac{\partial H}{\partial z} = C,$$

C désignant une constante.

Or on verra facilement que, si

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est l'équation de la sphère par rapport à laquelle la surface est anal-

lagmatique, l'équation de la surface peut s'écrire

$$\varphi(s, x, y, z, u) = 0,$$

s désignant

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + R^2,$$

et φ une fonction homogène de x, y, z, s , et l'on trouvera sans peine

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_1(qz - ry + \alpha) + \varphi_2(rx - pz + \beta) \\ &\quad + \varphi_3(py - qx + \gamma) + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \left(\alpha x + \beta y + \gamma z + R \frac{\partial R}{\partial u} \right) \\ H &= \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4R^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Quant à l'équation (86), par suite de l'introduction de la variable s , elle prend la forme

$$H - x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y} - z \frac{\partial H}{\partial z} - 2(x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial H}{\partial s} = C;$$

et, comme en tous les points de la courbe (C) on a

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = s,$$

on trouve

$$H - x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y} - z \frac{\partial H}{\partial z} - s \frac{\partial H}{\partial s} = C.$$

Or la fonction H est la somme de deux fonctions homogènes de x, y, z, s , l'une de degré 1, qui s'élimine de l'équation précédente en vertu du théorème des fonctions homogènes, et l'autre de degré zéro, et pour laquelle l'opération

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + s \frac{\partial}{\partial s}$$

donne un résultat nul. En tenant compte de cette remarque, on a sans calcul

$$(88) \quad \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3 + 2R \frac{dR}{du} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = C \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4R^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2}$$

en tous les points de la courbe (C). Or, si la nature de la surface rend

cette équation impossible à vérifier, il faudra que l'on ait

$$C = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \frac{dR}{du} = 0.$$

Ces équations expriment que l'origine des coordonnées est fixe et que le rayon de la sphère est invariable, ce qui donne le théorème suivant :

Un système orthogonal étant formé de surfaces anallagmatiques, toutes ces surfaces doivent être anallagmatiques par rapport à la même sphère, à moins que la relation (88) ne puisse être satisfaite.

On verra facilement que la relation (88) peut se ramener à la forme suivante. Considérons la sphère osculatrice en un point M de (C) à la surface suivant la direction de la ligne de courbure normale à (C), ligne de courbure dont la tangente est dirigée suivant le rayon. L'équation (88) donne, entre les coordonnées x' , y' , z' de son centre et son rayon, la relation

$$(89) \quad \alpha x' + \beta y' + \gamma z' - R \frac{\partial R}{\partial u} = C\rho,$$

qui exprime que cette sphère doit couper un plan fixe sous un angle constant. Ce plan est l'intersection de la sphère et de la sphère infiniment voisine par rapport à laquelle la surface infiniment voisine est anallagmatique.

Il suit du théorème général précédent que, si l'une des familles d'un système triple est formée de cyclides, ces surfaces doivent être anallagmatiques par rapport aux cinq mêmes sphères, ce qui simplifie beaucoup la recherche de pareils systèmes.

Mais, avant d'entreprendre cette recherche, nous allons donner quelques notions sur un système particulier de coordonnées dont nous aurons à faire usage dans cette recherche et dans celles qui suivront. Ce système a déjà été étudié dans notre ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*. Nous allons en rappeler rapidement la définition et les propriétés.

§ VI. — Notions sur les coordonnées pentasphériques.

Considérons une sphère quelconque rapportée à des axes rectangulaires; on peut toujours écrire son équation sous la forme

$$(90) \quad \alpha_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 i \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = 0.$$

i désignant $\sqrt{-1}$, et en supposant que l'on ait

$$(91) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_3^2 = 1.$$

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du centre et par ρ le rayon de cette sphère, on trouvera facilement

$$(92) \quad x' = -\frac{\alpha_1 R}{\alpha_1 + i\alpha_3}, \quad y' = -\frac{\alpha_2 R}{\alpha_1 + i\alpha_3}, \quad z' = -\frac{\alpha_3 R}{\alpha_1 + i\alpha_3}, \quad \rho = \frac{R}{\alpha_1 + i\alpha_3},$$

et par suite, pour un point quelconque de l'espace, le premier membre de l'équation (90) aura pour valeur

$$(93) \quad \alpha_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + i\alpha_5 \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = R \frac{S}{2\rho},$$

S désignant la puissance de ce point par rapport à la sphère. Remarquons, une fois pour toutes, que si la sphère se réduisait à un plan, si l'on avait $\alpha_1 + i\alpha_3 = 0$, $\frac{S}{\rho}$ devrait être remplacé par la distance au plan.

Supposons que l'on ait deux sphères représentées par les équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2 x + \dots &= 0, \\ \beta_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \beta_2 x + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Les calculs les plus élémentaires donnent la condition pour que les deux sphères se coupent à angle droit. On trouve ainsi

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4 + \alpha_5 \beta_5 = 0.$$

La forme de cette relation nous conduit à une théorie très-simple du système de cinq sphères orthogonales. Considérons cinq sphères S_1, \dots, S_5 de rayons R_1, \dots, R_5 et écrivons leurs équations sous la forme

$$(94) \quad \alpha_1^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2^k x + \alpha_3^k y + \alpha_4^k z + i\alpha_5^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = \frac{S_k}{2R_k} = 0,$$

qui convient à la sphère S_k , et où l'on devra donner à k les valeurs 1, 2, ..., 5. Nous aurons d'abord, par hypothèse,

$$(95) \quad (\alpha_1^k)^2 + (\alpha_2^k)^2 + \dots + (\alpha_5^k)^2 = 1,$$

et en second lieu, les sphères étant orthogonales,

$$(96) \quad \alpha_1^k \alpha_1^i + \alpha_2^k \alpha_2^i + \dots + \alpha_5^k \alpha_5^i = 0.$$

Ces deux groupes de formules rattachent la théorie du système des sphères à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. On voit, en effet, qu'il y a entre les coefficients α_k^i les relations qui caractérisent ces substitutions.

On déduit de cette remarque une première propriété fondamentale dans cette théorie. En élevant l'équation (94) au carré et faisant la somme des équations ainsi obtenues, on a

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_i}{2R_i} \right)^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} \right)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} \right)^2 = 0.$$

Ainsi, entre les puissances d'un point quelconque par rapport aux cinq sphères, on a la relation identique

$$(97) \quad \sum_1^5 \left(\frac{S_i}{R_i} \right)^2 = 0.$$

Nous pouvons maintenant définir le nouveau système de coordonnées que nous avons proposé. Nous définirons, comme coordonnées pentasphériques d'un point, les cinq quantités x_k proportionnelles à $\frac{S_i}{R_i}$,

$$(98) \quad x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i};$$

et, comme nous n'emploierons que des équations homogènes, le facteur λ n'aura aucune influence sur les résultats. On aura d'ailleurs, en vertu de la formule (97),

$$(99) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = 0;$$

ainsi les cinq coordonnées devront être liées par l'équation précédente.

Examinons d'abord comment on passera de ces coordonnées aux coordonnées ordinaires. La formule (94), en tenant compte de l'équation (98), s'écrit

$$(100) \quad \alpha_1^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} + \alpha_2^k x + \alpha_3^k y + \alpha_4^k z + i \alpha_5^k \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = 2\lambda x_k.$$

Si l'on donne à k les cinq valeurs 1, 2, ..., 5 et que l'on résolve ces équations par rapport aux cinq inconnues

$$x, y, z, \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R},$$

ce qui se fait de la manière la plus simple, on trouvera

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} = \frac{R}{2\lambda} (\alpha_1^1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \dots + \alpha_1^5 x_5), \\ x = \frac{R}{2\lambda} (\alpha_2^1 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \dots + \alpha_2^5 x_5), \\ y = \frac{R}{2\lambda} (\alpha_3^1 x_1 + \alpha_3^2 x_2 + \dots + \alpha_3^5 x_5), \\ z = \frac{R}{2\lambda} (\alpha_4^1 x_1 + \alpha_4^2 x_2 + \dots + \alpha_4^5 x_5), \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} = \frac{-i}{2\lambda} (\alpha_5^1 x_1 + \alpha_5^2 x_2 + \dots + \alpha_5^5 x_5). \end{array} \right.$$

En retranchant la première et la dernière de ces équations, on trouvera

$$(102) \quad 2R\lambda = -x_1(\alpha_1^1 + i\alpha_5^1) - x_2(\alpha_1^2 + i\alpha_5^2) - \dots - x_5(\alpha_1^5 + i\alpha_5^5),$$

et λ étant connu, les formules (101) feront connaître $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$, qui seront des quotients de fonctions linéaires de x_1, x_2, \dots, x_5 .

Si l'on prend la différentielle de la formule (100) et que l'on effectue la somme des carrés des équations obtenues en donnant à k les valeurs 1, ..., 5, on trouvera

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4} \sum \left[d \left(\frac{x_k}{\lambda} \right) \right]^2,$$

ou, en se rappelant que l'on a

$$\sum x_k^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\sum x_k dx_k = 0,$$

$$(103) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4\lambda^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_5^2).$$

Proposons-nous maintenant d'établir les relations d'orthogonalité dans ce système de coordonnées.

Nous remarquerons d'abord les relations suivantes, faciles à vérifier, entre les puissances d'un point par rapport aux cinq sphères orthogonales :

$$(104) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial z}\right)^2 = 4(S_k + R_k^2), \\ \frac{\partial S_k}{\partial x} \frac{\partial S_{k'}}{\partial x} + \frac{\partial S_k}{\partial y} \frac{\partial S_{k'}}{\partial y} + \frac{\partial S_k}{\partial z} \frac{\partial S_{k'}}{\partial z} = 2(S_k + S_{k'}). \end{cases}$$

Cela posé, considérons les équations de deux surfaces

$$(105) \quad \varphi(S_1, \dots, S_5) = 0, \quad \psi(S_1, \dots, S_5) = 0,$$

contenant les cinq quantités S_i , et formons l'expression

$$(106) \quad (\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

on aura évidemment

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \sum_{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \psi}{\partial S_{i'}} (S_i, S_{i'}),$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (104),

$$(\varphi, \psi) = 2 \left(\sum S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \right) \sum \frac{\partial \psi}{\partial S_i} + 2 \left(\sum S_i \frac{\partial \psi}{\partial S_i} \right) \left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \right) + 4 \sum R_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \psi}{\partial S_i};$$

si donc les fonctions φ , ψ sont homogènes, on aura, en vertu des équations (105),

$$\sum S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} = m \varphi = 0, \quad \sum S_i \frac{\partial \psi}{\partial S_i} = 0,$$

et la condition d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum R_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \psi}{\partial S_i} = 0,$$

ou, en introduisant les quantités x_i ,

$$(107) \quad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0,$$

équation qui est de forme toute pareille à la relation ordinaire, mais qui exige que les équations aient été mises sous forme homogène.

Or il est très-facile d'atteindre ce résultat. D'abord, si les expressions φ , ψ ont été exprimées en x , y , z , en substituant pour x , y , z leurs valeurs déduites des formules (101), et qui sont homogènes, on aura des équations homogènes; mais supposons qu'on ait trouvé directement une relation non homogène entre S_1 , ..., S_5 ,

$$\varphi(S_1, \dots, S_5) = 0;$$

si l'on se reporte à la relation (102), et que l'on remarque que, pour $\lambda = 1$,

$$x_i = \frac{S_i}{R_i},$$

et que l'on a, d'ailleurs, en vertu des formules (92),

$$\alpha_i^k + i\alpha_i^k = \frac{R}{R_i^k},$$

on voit que cette relation (102) deviendra

$$(108) \quad z = -\frac{S_1}{R_1^2} - \frac{S_2}{R_2^2} - \dots - \frac{S_5}{R_5^2}.$$

Il y a donc entre les cinq puissances S_k une relation non homogène dont on peut profiter pour rendre homogène toute relation où elles figurent.

L'équation (107) nous conduit immédiatement au système orthogonal formé de trois familles de cyclides; considérons, en effet, les surfaces représentées par l'équation

$$(109) \quad \frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - a_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - a_5} = 0,$$

toute pareille à celle des surfaces du second degré. Il passe trois de ces surfaces par un point quelconque de l'espace. Deux quelconques d'entre elles se coupent à angle droit. Je ne reviendrai point sur tous ces points, pour lesquels je renverrai à mes Mémoires antérieurs et à mon Ouvrage déjà cité, et je me contenterai de rappeler que, pour le système

précédent, on trouve

$$(110) \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \frac{1}{M^2} \left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) d\rho^2}{f(\rho)} + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2) d\rho_1^2}{f(\rho_1)} + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1) d\rho_2^2}{f(\rho_2)} \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$f(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2), \dots, (\lambda - a_s).$$

§ VII. — Des systèmes orthogonaux formés d'une famille de cyclides.

Bien que nous ayons déjà indiqué un théorème général qui conduit à admettre que les cyclides faisant partie d'une même famille doivent être anallagmatiques par rapport aux cinq mêmes sphères, nous allons donner une autre démonstration qui s'applique aussi aux surfaces du second degré.

L'équation d'une famille de cyclides peut toujours être écrite

$$(111) \quad \sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0,$$

pourvu que l'on regarde dans cette équation les quantités α_i comme des fonctions du paramètre u et les quantités x_i comme des quantités variables, fonctions linéaires de $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$, dont les coefficients dépendront de u . Les équations

$$\bullet \quad x_i = 0$$

représentent les cinq sphères par rapport auxquelles la cyclide de paramètre u est anallagmatique. Les quantités x_i dépendant de u et étant d'ailleurs liées par la relation

$$x_1^2 + \dots + x_5^2 = 0,$$

on aura pour leurs dérivées des expressions de la forme

$$(112) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u} = \alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{i5} x_5,$$

où les α_{ik} sont des fonctions de u satisfaisant aux conditions

$$\alpha_{ii} = 0, \quad \alpha_{il} + \alpha_{li} = 0.$$

Ces équations sont toutes semblables à celles que l'on rencontre dans la théorie du déplacement d'une figure.

Cela posé, si les cyclides font partie d'un système orthogonal, chaque surface des deux autres familles leur sera orthogonale et les coupera suivant une ligne de courbure.

Si donc on considère la cyclide (C)

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0$$

faisant partie du système, toute autre surface (Σ) de l'une des deux autres familles pourra être considérée comme l'enveloppe de la cyclide (C')

$$(113) \quad \sum \frac{x_i^2}{a_i - t} = 0,$$

qui coupe la première cyclide orthogonalement suivant une ligne de courbure, t étant une fonction convenablement choisie du paramètre u . Pour avoir cette enveloppe, prenons la dérivée par rapport à u de l'équation (113), nous aurons

$$(114) \quad \sum \frac{x_i^2}{(a_i - t)^2} \left(\frac{dt}{du} - \frac{da_i}{du} \right) + \sum \frac{2x_i}{a_i - t} \frac{dx_i}{du} = 0.$$

L'équation (114), si l'on y remplace les $\frac{dx_i}{du}$ par leurs valeurs déduites des formules (112), devient du second degré et représente une cyclide qui doit couper la cyclide (C') (113) suivant la ligne de courbure intersection de (C) et de (C'). Or l'équation générale des cyclides passant par l'intersection de (C) et de (C') s'obtient en combinant linéairement leurs équations. Il faut donc que l'équation (114), après qu'on y aura remplacé $\frac{dx_i}{du}$ par leurs valeurs, ne contienne pas de rectangle, ce qui entraîne les équations

$$\alpha_{ik} \left(\frac{1}{a_i - t} - \frac{1}{a_k - t} \right) = 0 = \alpha_{ik} \frac{a_i - a_k}{(a_i - t)(a_k - t)};$$

donc, tant que les cyclides considérées seront les cyclides générales et

que l'on n'aura pas

$$a_i = a_t,$$

il faudra que l'on ait

$$\alpha_{it} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx_i}{du} = 0,$$

ce qui exige que les cinq sphères par rapport auxquelles la cyclide est anallagmatique soient fixes. On retrouve ainsi notre première proposition.

En exprimant que l'équation (114) est une combinaison linéaire de (111) et (113), on trouvera des équations qui définiront les fonctions α_i et t de u , et qu'on peut ramener au type suivant :

$$(115) \quad a_i \frac{da_i}{du} = m + 2na_i + pa_i^2,$$

$$(116) \quad t \frac{dt}{du} = m + 2nt + pt^2,$$

où m , n , p sont des fonctions quelconques de u . Une fois qu'on aura déterminé les fonctions α_i par les équations (115), l'intégration de la formule (116) avec une constante arbitraire donnera pour t une fonction de u et de la constante ε ; ε sera le paramètre des deux autres familles qui complètent le système. On obtiendra leur équation en éliminant u entre les équations (111) et (113).

Supposons, par exemple, que l'on prenne

$$n = 0, \quad p = 0, \quad m = \frac{1}{2},$$

on aura

$$\alpha_i^2 = u + \alpha_i, \quad t^2 = u + \varepsilon.$$

L'équation de la famille des cyclides sera

$$\sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u + \alpha_i}} = 0;$$

les deux autres familles du système s'obtiendront en éliminant u entre

les équations

$$\sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u + \alpha_i}} = 0, \quad \sum \frac{x_i^2}{\sqrt{u + \alpha_i} - \sqrt{u + \varepsilon}} = 0,$$

ε désignant le paramètre de ces familles.

§ VIII. — *Extension de la méthode de formation de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre à l'étude de problèmes différents.*

La méthode que nous avons suivie pour former l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont dépend la recherche des systèmes orthogonaux repose sur l'élimination progressive des dérivées d'ordre supérieur de deux fonctions que nous avons appelées ν , ω . Elle s'étend donc naturellement à l'étude de la question suivante :

Trois fonctions u , ν , ω satisfaisant aux équations

$$\delta_u \nu = 0, \quad \delta_u \omega = 0, \quad \pi = 0,$$

où π ne contient que les fonctions ν , ω et leurs dérivées premières, chercher l'équation à laquelle satisfait u .

Nous avons vu, en effet (§ I^{er}), que l'on peut, en prenant $\delta_u \pi$, éliminer toutes les dérivées secondes de ν , ω au moyen des deux premières équations et former ainsi une équation nouvelle ne contenant que les dérivées premières de ν , ω . En opérant de la même manière on en formera une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait assez d'équations pour éliminer les dérivées de ν , ω .

Appliquons cette méthode à la solution du problème suivant. On sait qu'il existe une infinité de systèmes doubles orthogonaux définis de la manière suivante : la première famille (Σ) est formée des surfaces lieux des points dont la somme des distances à deux surfaces fixes (A) et (B) est constante ; la deuxième (Σ') est formée des surfaces lieux des points pour lesquels la différence des distances aux mêmes surfaces est constante, on demande si l'on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles une troisième, formée de surfaces (S), les coupant à angle droit. Il est clair que cette question est identique à la

suivante : *Étant données les surfaces parallèles à deux surfaces fixes (A) et (B), y a-t-il une troisième famille de surfaces les coupant à angle droit?*

On aura, pour les équations du problème,

$$(117) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1, \quad \delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0,$$

qui rentrent dans le type que nous avons examiné. On en déduira les suivantes :

$$(118) \quad v_1^2 u_{11} + 2v_1 v_2 u_{12} + \dots = 0,$$

puis

$$(119) \quad \sum_i \sum_k v_i v_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,$$

et des équations semblables pour w , et ce qui conduira à deux équations du troisième ordre pour la fonction u .

Mais la question se simplifie beaucoup si l'on emploie quelques considérations géométriques. Les surfaces v , w étant parallèles et orthogonales aux surfaces u , leurs normales doivent être en chaque point tangentes aux surfaces u . Il faut donc nécessairement que les surfaces u contiennent ces droites qui sont des trajectoires orthogonales des surfaces v , w . Les surfaces u doivent donc pouvoir être engendrées de deux manières par une droite, ce qui exige qu'elles soient des plans ou des surfaces du second degré.

Le cas où les surfaces sont des plans est facile à traiter. En effet, si, dans un plan, on trace deux familles de courbes parallèles et que l'on fasse rouler ce plan sur une surface développable, les courbes parallèles engendreront des surfaces parallèles répondant à la question proposée.

Le cas véritablement intéressant est celui où l'on suppose que les surfaces (u) sont du second degré. Comme ces surfaces font partie d'un système orthogonal, elles devront avoir les mêmes plans principaux. Commençons par supposer qu'elles ont un centre, et que leur équation soit

$$(119 \text{ bis}) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

où a , b , c sont des fonctions de u .

On devra avoir ici

$$(120) \quad \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1, \\ axv_1 + byv_2 + czv_3 = 0, & axw_1 + byw_2 + czw_3 = 0, \end{cases}$$

et, en appliquant l'équation (118),

$$(121) \quad \begin{cases} av_1^2 + bv_2^2 + cv_3^2 = 0, \\ aw_1^2 + bw_2^2 + cw_3^2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont d'ailleurs géométriquement évidentes; elles expriment que les normales aux surfaces v , w sont les génératrices rectilignes de la surface. En écrivant que la deuxième équation (120) et la première (121) sont compatibles, c'est-à-dire que leur crochet est nul, on trouvera, après quelques réductions,

$$(122) \quad \begin{cases} (a^2b' + b^2a')(xv_2 - yv_1)^2 + (b^2c' + c^2b')(yv_3 - zv_2)^2 \\ + (c^2a' + a^2c')(zv_1 - xv_3)^2 = 0, \end{cases}$$

et une équation semblable pour w ; or, en combinant les équations (120), (121), on obtient facilement

$$(123) \quad ab(xv_2 - yv_1)^2 + bc(yv_3 - zv_2)^2 + ca(zv_1 - xv_3)^2 = 0.$$

Les équations (122), (123) devant être vérifiées aussi quand on y remplace v par w , doivent être identiques, l'une à l'autre, ce qui donne, comme conditions :

$$\frac{a^2b' + b^2a'}{ab} = \frac{b^2c' + c^2b'}{bc} = \frac{c^2a' + a^2c'}{ac};$$

si l'on écrit l'équation (119 bis) sous la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

les équations précédentes deviennent

$$(124) \quad C(dA + dB) = B(dA + dC) = A(dB + dC),$$

et elles définissent complètement le système cherché. On verra sans peine qu'elles entraînent, comme cela devait être, la relation (75).

Les équations (124) ne paraissent pas intégrables par les procédés connus. Il convient donc de traiter la même question pour les surfaces dépourvues de centre, et l'on sera ainsi conduit, au moins, au système des paraboloides que M. Serret a fait connaître le premier.

Un calcul tout semblable au précédent nous a donné comme solution la famille de paraboloides représentée par l'équation

$$(125) \quad \frac{y^2}{\alpha + u} + \frac{z^2}{\alpha - u} = 2x + \alpha \log u,$$

où α est une constante arbitraire. Pour les cas où elle est nulle, on retrouve le système de M. Serret.

On pourrait trouver des familles de surfaces de révolution satisfaisant aux équations (124); mais je laisserai de côté l'examen de tous ces cas particuliers.



MÉMOIRE

SUR L'ÉLIMINATION,

PAR M. H. LEMONNIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

SECONDE PARTIE.

I.

22. Reprenons les $m + n - 2p + 2$ équations du n° 7, et disposons-les les unes au-dessous des autres, en portant les termes semblables dans une même colonne verticale, de façon qu'elles se suivent de haut en bas, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ xf(x) &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ x^{n-p}f(x) &= 0, \\ x^{n-p}F(x) &= 0, \\ x^{n-p-1}F(x) &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ F(x) &= 0. \end{aligned}$$

Formons, suivant la règle du n° 14, les plus grands communs diviseurs de $F(x)$ et $f(x)$, qui répondent successivement aux hypothèses de $p = n - 1$, $p = n - 2$, $p = n - 3$,

Les polynômes qui s'obtiennent ainsi sont :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 \\ 0 & \dots & a & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a_1 & \dots & a_{m-n+1} \\ A & A_1 & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_2 \\ 0 & \dots & a_1 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a_1 & \dots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ A & A_1 & \dots & A_{m-n} & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ 0 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a & a_1 & \dots & a_{m-n} \\ A & A_1 & \dots & A_{m-n} \end{vmatrix} \\
 R_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & a_{m-n+3} \\ A & \dots & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & a_{m-n+2} & a_{m-n+4} \\ A & \dots & \dots & A_{m-n+2} & A_{m-n+4} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots \\ a & \dots & a_{m-n+2} \\ A & \dots & A_{m-n+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} \\
 R_3 &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_2 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & a_{m-n+5} \\ A & \dots & \dots & A_{m-n+5} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+4} \\ 0 & 0 & A & \dots & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_2 & a_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & a_{m-n+4} & a_{m-n+6} \\ A & \dots & \dots & A_{m-n+4} & A_{m-n+6} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+3} & A_{m-n+5} \\ 0 & A & A_1 & \dots & a & A_{m-n+2} & A_{m-n+4} \end{vmatrix} x^{n-4} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & a_{m-n+4} \\ A & \dots & A_{m-n+4} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & A & A_1 & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Le premier fait à remarquer, c'est que les conditions, pour avoir n racines communes, sont précisément que les coefficients de R_1 soient tous nuls et que le premier coefficient de $f(x)$ ne le soit pas ; pour avoir $n - 1$ racines communes, que les coefficients de R_2 soient nuls, sans que le premier de R_1 , le soit, et ainsi de suite.

Généralement les conditions, pour avoir $n - p$ racines communes, sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls, sans que le premier de R_p le soit.

23. Le polynôme R_{n-p} divise tous les polynômes précédents quand ses racines sont les p racines communes aux équations $f(x) = 0$, $F(x) = 0$.

Observons d'abord que chacune des racines communes satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0, \quad x f(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{n-q} f(x) = 0, \\
 F(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{n-q} F(x) = 0,
 \end{aligned}$$

quel que soit q , si l'on fait passer les exposants en indices, on a un système d'équations du premier degré en $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-q}$, auquel on

satisfait en prenant pour $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-p}$ les puissances successives de chacune des p racines communes.

Or si, au lieu d'éliminer $x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p-1}$ du système

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-1}f(x) = 0, \\ F(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-1}F(x) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$R_{n-p} = 0,$$

on élimine $x_{p+2}, \dots, x_{m-n-p-2}$ du système

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-2}f(x) = 0, \\ F(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-2}F(x) = 0; \end{aligned}$$

c'est l'équation $R_{n-p-1} = 0$ qu'on obtiendra. Elle sera satisfaite par les p racines de l'équation $R_{n-p} = 0$; donc le polynôme $R_{n-p-1} = 0$ est divisible par R_{n-p} .

De même, si l'on élimine $x_{p+3}, \dots, x_{m+n-p-3}$ du système

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-3}f(x) = 0, \\ F(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-3}F(x) = 0, \end{aligned}$$

l'équation résultante étant $R_{n-p-2} = 0$ et admettant les p racines de $R_{n-p} = 0$, le polynôme R_{n-p-2} est divisible par R_{n-p} , et ainsi de suite.

24. Quant aux polynômes R d'indices supérieurs à $n - p$, on peut déduire des mêmes considérations qu'ils sont nuls identiquement.

D'abord, si l'on prend le système

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-1}f(x) = 0, \quad x^{m-p}f(x) = 0, \\ F(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-1}F(x) = 0, \quad x^{n-p}F(x) = 0, \end{aligned}$$

les valeurs $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} données (n° 11) par le système

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-1}f(x) = 0, \\ F(x) &= 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-1}F(x) = 0, \end{aligned}$$

jointes à celle qui s'ensuit pour x_{m+n-p} par $x^{m-p}f(x) = 0$, satisfont à l'équation $x^{n-p}F(x) = 0$ (n° 11). Le résultant est là R_{n-p+1} . Il est de degré $p-1$, il admet p racines. Il est donc nul identiquement.

Si l'on considère le système

$$\begin{aligned} f(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{m-p-1}f(x) = 0, \quad x^{m-p}f(x) = 0, \quad x^{m-p+1}f(x) = 0, \\ F(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{n-p-1}F(x) = 0, \quad x^{n-p}F(x) = 0, \quad x^{n-p+1}F(x) = 0, \end{aligned}$$

les valeurs de $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} , dont il vient d'être question, jointes à celle de x_{m+n-p} , donnée par $x^{m-p}f(x) = 0$, et à celle de $x_{m+n-p+1}$, donnée par $x^{m-p+1}f(x) = 0$, quand on les substituera dans $x^{n-p}F(x) = 0$, mèneront à une identité, d'après ce qu'on vient de voir; mais leur substitution dans $x^{n-p+1}F(x)$ ne pourra donner que R_{n-p+2} à un facteur près. On aura ainsi un polynôme en x du degré $p-2$ admettant les p racines. R_{n-p+2} sera donc nul identiquement.

Cela peut se continuer. Le fait, d'ailleurs, résulte de celui qui est établi (n° 21), car les coefficients des polynômes $R_{n-p+1}, R_{n-p+2}, \dots$ sont au nombre des déterminants dont la nullité est reconnue au n° 21.

25. Si l'on procède par la méthode des divisions à la recherche du plus grand commun diviseur des polynômes $F(x), f(x)$, on obtient en général des polynômes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ de degrés $n-1, n-2, n-3, \dots$ également divisibles par le plus grand commun diviseur R_{n-p} .

Il est, de plus, à remarquer que les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se produisent dans les coefficients de ces polynômes suivant la même progression que dans ceux des polynômes R_1, R_2, \dots .

Il suit de là que les deux séries de polynômes ne peuvent différer que par des multiplicateurs indépendants de x .

26. La relation qui suit ρ_1 et R_1 est

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

$\frac{m-n}{2}$ se prenant au cas où $m-n$ est pair, et $\frac{m-n+1}{2}$ au cas contraire.

En effet, si l'on désigne le quotient de $F(x)$ par $f(x)$ par

$$q x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}$$

et le reste ρ_1 par

$$r x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1},$$

on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
 A &= aq, \\
 A_1 &= a_1q + aq_1, \\
 A_2 &= a_2q + a_1q_1 + aq_2, \\
 A_3 &= a_3q + a_2q_1 + a_1q_2 + aq_3, \\
 &\dots, \\
 A_{m-n+1} &= a_{m-n+1}q + a_{m-n}q_1 + \dots + a_1q_{m-n} + r, \\
 A_{m-n+2} &= a_{m-n+2}q + a_{m-n+1}q_1 + \dots + a_2q_{m-n} + r_1, \\
 &\dots;
 \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{vmatrix}
 A & a & 0 & \dots & 0 \\
 A_1 & a_1 & a & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_{m-n} & a_{m-n} & \dots & \dots & a \\
 A_{m-n+1} - r & a_{m-n+1} & \dots & \dots & a_1
 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$-r(-1)^{m-n+1}a^{m-n+1} + \begin{vmatrix}
 A & a & \dots & \dots & 0 \\
 A_1 & a_1 & a & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_{m-n} & a_{m-n} & \dots & \dots & a \\
 A_{m-n+1} & a_{m-n+1} & \dots & \dots & a_1
 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$r(-1)^{m-n+1}a^{m-n+1} = \begin{vmatrix}
 0 & \dots & \dots & a & a_1 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & a_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a & a_1 & \dots & \dots & a_{m-n+1} \\
 A & A_1 & \dots & \dots & A_{m-n+1}
 \end{vmatrix} (-1)^{k'},$$

étant posé

$$m - n + 2 = 2k'$$

ou

$$m - n + 2 = 2k' + 1,$$

suivant que $m - n$ est pair ou impair.

La valeur de r_1 , qu'on obtiendrait d'une manière semblable, ne diffère de r que par le changement des éléments de la dernière colonne

du déterminant en $a_2, a_3, \dots, a_{m-n+2}, A_{m-n+2}$, celle de r_2 que par leur changement en $a_3, a_4, \dots, a_{m-n+3}, A_{m-n+3}$, et ainsi de suite.

Il en résulte

$$\rho_1 (-1)^{m-n+1} a^{m-n+1} = R_1 (-1)^{k'},$$

ce qui revient à

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

suyant que $m - n$ est pair ou impair.

27. Si l'on pose

$$F(x) = f(x)q + \rho_1,$$

on a en conséquence

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x)Q + R_1 (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}.$$

En particulier, au cas de $m - n = 1$, cette relation devient

$$a^2 F(x) = f(x)Q - R_1;$$

par conséquent, si l'on pose

$$R_1 = \alpha_1 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \dots,$$

on aura

$$a^2 f(x) = R_1 q_1 - R'_2,$$

R'_2 désignant le polynôme analogue à R_1 , défini par l'expression

$$R'_2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a & \alpha_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots$$

Ce polynôme R'_2 revient au second des polynômes amenés par le procédé de la division; ses coefficients sont proportionnels à ceux de R_1 . Le rapport peut s'obtenir en dégagant dans leurs premiers coefficients les termes où figure A_{m-n+3} .

Dans le premier coefficient de R'_2 relevons d'abord le terme

$$-\gamma_1 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ a & \alpha_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 \alpha_1 a,$$

et prenons dans ce terme

$$A_{m-n+3} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} a.$$

Il y a, d'autre part, dans le premier coefficient de R_2 , le terme

$$-A_{m-n+3} \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+1} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} = -A_{m-n+3} a (-1)^{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix};$$

on en conclut

$$R'_2 = R_2 (-1)^{m-n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} = R_2 \begin{vmatrix} a & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m-n} & \dots & a \end{vmatrix} (-1)^{m-n} (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}$$

ou

$$R'_2 = R_2 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

et, par suite, on a la relation

$$\alpha_2^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}.$$

De même, si l'on pose

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 q_2 - R'_3,$$

en désignant R_2 par $\alpha_2 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \gamma_2 x^{n-4} + \dots$, on a

$$R'_3 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} x^{n-3} + \dots$$

Dans le premier coefficient on voit le terme

$$-\gamma_1 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 \alpha_2 \alpha_1,$$

et il s'y trouve

$$\begin{aligned}
 & -\Lambda_{m-n+3} \begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_1 \\ . & . & \dots & .. \\ a & . & \dots & a_{m-n+3} \\ 0 & \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+1} \end{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\
 & = -a \Lambda_{m-n+3} (-1)^{m-n+1} \begin{vmatrix} a & \dots & a_1 \\ . & \dots & .. \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+1} \end{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\
 & = a \Lambda_{m-n+3} (-1)^{m-n} \alpha_1^2 \alpha_2;
 \end{aligned}$$

mais, dans le premier coefficient de R_3 , il y a le terme

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{m-n+3} \begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_2 \\ . & . & \dots & .. \\ a & . & \dots & a_{m-n+1} \\ 0 & \Lambda & 0 & \dots & \Lambda_{m-n+3} \\ 0 & 0 & \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+1} \end{vmatrix} \\
 & = a \Lambda_{m-n+3} (-1)^{m-n+2} \begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_2 \\ . & . & \dots & .. \\ a & . & \dots & a_{m-n+3} \\ \Lambda & . & \dots & \Lambda_{m-n+3} \\ 0 & \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+1} \end{vmatrix} \\
 & = a \Lambda_{m-n+3} (-1)^{m-n} \alpha_2.
 \end{aligned}$$

On en conclut

$$R'_3 = \alpha_1^2 R_3,$$

et par suite

$$\alpha_1^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3.$$

28. Généralement, si α_p désigne le premier coefficient de R_p , on a la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

p étant au moins égal à 1.

Nous avons en effet

$$\begin{aligned}
 R_p &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p-1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} x^{n-p} + \dots, \\
 R_{p+1} &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix} x^{n-p-1} + \dots, \\
 R_{p+2} &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+3} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+3} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+2} \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \dots.
 \end{aligned}$$

Or, si l'on forme R'_{p+2} en partant de R_p et R_{p+1} , comme R_1 est formé de $F(n)$ et $f(x)$, on a

$$R'_{p+2} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \dots,$$

en posant

$$R_p = \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \dots.$$

Dans le premier coefficient, relevons le terme

$$\gamma_{p+1} \alpha_{p+1} \alpha_p,$$

et extrayons-en le terme

$$\begin{aligned}
 & A_{m-n+2p+3} (-1)^p \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+p-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} x_p \alpha_{p+1} \\
 & = a A_{m-n+2p+3} (-1)^{m-n} \alpha_p^2 \alpha_{p+1}.
 \end{aligned}$$

Or, dans le premier coefficient de R_{p+2} , le terme homologue est

$$\Lambda_{m-n+2p+3} (-1)^{p+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \alpha_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \alpha_{m-n+2p+2} \\ 0 & \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+2p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

$$= a \Lambda_{m-n+2p+3} (-1)^{p+1} (-1)^{m-n+p+1} \alpha_{p+1} = a \Lambda_{m-n+2p+3} (-1)^{m-n} \alpha_{p+1}.$$

On a, d'après cela,

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2};$$

et comme on a

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - R'_{p+2},$$

il s'ensuit

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+1}.$$

Au résumé, les relations qui lient les fonctions $F(x)$, $f(x)$ et les fonctions R sont

$$\begin{aligned} \alpha^{m-n+1} F(x) &= f(x) \cdot Q + R_1 (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}, \\ \alpha_1^2 f(x) &= R_1 Q_1 - \alpha^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}} R_1, \\ \alpha_2^2 R_1 &= R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{p+1}^2 R_p &= R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Lorsque les coefficients sont réels dans $F(x)$ et $f(x)$, ils le sont aussi dans toutes les fonctions R . Si alors α_p et α_{p+1} sont différents de zéro, les fonctions R_p et R_{p+2} sont de signes contraires pour toute valeur de x qui annule R_{p+1} sans les annuler.

29. En général, les degrés des polynômes $f(x)$, R_1 , R_2 , . . . diminuent d'une unité, d'un polynôme au suivant. Mais le contraire peut arriver pour deux polynômes particuliers. Par exemple, alors que R_p est du degré $n - p$, il se peut que R_{p+1} soit du degré $n - p - k$ ($k > 1$);

il en est ainsi lorsque, dans la division de R_{p-1} par R_p , le reste ρ'_{p+1} est du degré $n - p - k$.

Si les polynômes $F(x), f(x)$ avaient $n - p - k$ racines communes, le polynôme R_{p+k+1} serait nul identiquement, et le polynôme précédent R_{p+k} , égalé à zéro, donnerait ces racines communes. Le polynôme R_{p+1} , s'il est du même degré, est alors égal au polynôme R_{p+k} à un facteur près, indépendant de x . Mais, à en juger par les différents exemples que nous présentons plus loin, le fait a toute généralité : c'est-à-dire que si le polynôme R_{p+1} , au lieu d'être du degré $n - p - 1$, est d'un degré inférieur $n - p - k$ ($k > 1$), le polynôme R_{p+k} n'en diffère que par un facteur constant. Quant aux polynômes intermédiaires, lorsqu'on a $k > 2$, ils se trouvent nuls dans tous ces exemples.

30. Voyons du reste ce qui est à déduire des relations générales

$$\begin{aligned} \alpha_p^2 R_{p-1} &= R_p Q_p - \alpha_{p-1}^2 R_{p+1}, \\ \alpha_{p+1}^2 R_p &= R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k-2} &= R_{p+k-1} Q_{p+k-1} - \alpha_{p+k-2}^2 R_{p+k}, \\ \alpha_{p+k}^2 R_{p+k-1} &= R_{p+k} Q_{p+k} - \alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k+1}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

en cherchant ce qu'elles tendent à devenir, lorsque R_{p+1} perd son premier ou plusieurs premiers termes.

Observons d'abord qu'en posant, d'une façon générale,

$$\begin{aligned} Q_p &= q_p x + q'_p, \\ R_p &= \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \dots, \end{aligned}$$

on peut développer ces relations, à partir de la seconde, en

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1} \alpha_p &= \eta_{p+1}, \\ \alpha_{p+1}^2 \beta_p &= \alpha_{p+1} q'_{p+1} + \beta_{p+1} q_{p+1}, \\ \alpha_{p+1}^3 \gamma_p &= \beta_{p+1} q'_{p+1} + \gamma_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \alpha_{p+2}, \\ \alpha_{p+1}^3 \delta_p &= \gamma_{p+1} q'_{p+1} + \delta_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{p+2}\alpha_{p+1} &= q_{p+2}, \\
 \alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} &= \alpha_{p+2}q'_{p+2} + \beta_{p+2}q_{p+2}, \\
 \alpha_{p+2}^3\gamma_{p+1} &= \beta_{p+2}q'_{p+2} + \gamma_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\alpha_{p+3}, \\
 \alpha_{p+2}^3\delta_{p+1} &= \gamma_{p+2}q'_{p+2} + \delta_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\beta_{p+3}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \alpha_{p+3}\alpha_{p+2} &= q_{p+3}, \\
 \alpha_{p+3}^2\beta_{p+2} &= \alpha_{p+3}q'_{p+3} + \beta_{p+3}q_{p+3}, \\
 \alpha_{p+3}^3\gamma_{p+2} &= \beta_{p+3}q'_{p+3} + \gamma_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\alpha_{p+4}, \\
 \alpha_{p+3}^3\delta_{p+2} &= \gamma_{p+3}q'_{p+3} + \delta_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\beta_{p+4}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \alpha_{p+4}\alpha_{p+3} &= q_{p+4}, \\
 \alpha_{p+4}^2\beta_{p+3} &= \alpha_{p+4}q'_{p+4} + \beta_{p+4}q_{p+4}, \\
 \alpha_{p+4}^3\gamma_{p+3} &= \beta_{p+4}q'_{p+4} + \gamma_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\alpha_{p+5}, \\
 \alpha_{p+4}^3\delta_{p+3} &= \gamma_{p+4}q'_{p+4} + \delta_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\beta_{p+5}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

soit en premier lieu $\alpha_{p+1} = 0$ avec $\beta_{p+1} \geq 0$.

Les relations donnent $q_{p+1} = 0, q_{p+2} = 0$; puis

$$\begin{aligned}
 0 &= \beta_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\alpha_{p+2}, & \alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} &= \alpha_{p+2}q'_{p+2}, \\
 0 &= \gamma_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\beta_{p+2}, & \alpha_{p+2}^3\gamma_{p+1} &= \beta_{p+2}q'_{p+2}, \\
 &\dots\dots\dots, & \alpha_{p+2}^3\delta_{p+1} &= \gamma_{p+2}q'_{p+2}, \\
 && &\dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

d'où

$$R_{p+2} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \text{ et } R_{p+2} = R_{p+1} \frac{\alpha_{p+2}^2}{q'_{p+2}}.$$

Supposons en second lieu

$$\alpha_{p+1} = 0, \beta_{p+1} = 0, \gamma_{p+1} \leq 0,$$

on aura encore

$$q_{p+1} = 0, q_{p+2} = 0, \text{ puis } \alpha_{p+2} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
 0 &= \gamma_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2}, & 0 &= \beta_{p+1} q'_{p+2}, \\
 0 &= \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, & 0 &= \gamma_{p+2} q'_{p+2}, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\
 & & q_{p+3} &= 0, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} &= \alpha_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} &= \beta_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} &= \gamma_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ces relations sont satisfaites par $R_{p+2} = 0$, $q'_{p+1} = 0$, $q'_{p+2} = 0$, sans rien fixer sur q'_{p+3} et R_{p+3} .

Si l'on suppose $R_{p+2} \geq 0$, elles donnent

$$q'_{p+3} = 0, \quad R_{p+2} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2}, \quad R_{p+3} = R_{p+2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}}.$$

Considérons en troisième lieu le cas de $\alpha_{p+1} = 0$, $\beta_{p+1} = 0$, $\gamma_{p+1} = 0$, $\delta_{p+1} \geq 0$.

Il s'ensuivra

$$\begin{aligned}
 q_{p+1} &= 0, & q_{p+2} &= 0, \\
 \alpha_{p+2} &= 0, & \beta_{p+2} &= 0, \\
 0 &= \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, & 0 &= \beta_{p+2} q'_{p+2}, \\
 0 &= \varepsilon_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \delta_{p+2}, & 0 &= \gamma_{p+2} q'_{p+2}, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\
 & & q_{p+3} &= 0, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} &= \alpha_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} &= \beta_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & \alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} &= \gamma_{p+3} q'_{p+3}, \\
 & & &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Si R_{p+2} est égal à zéro, on voit qu'on aura $R_{p+3} = 0$ pour $q'_{p+3} \geq 0$. Si l'on suppose $q'_{p+3} = 0$ avec $R_{p+2} = 0$, rien ne s'ensuit sur α_{p+3} , β_{p+3} ...

Ajoutons que pour $\alpha_{p+3} = 0$ on a $q_{p+4} = 0$, et ensuite

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}^2 \beta_{p+3} &= \alpha_{p+1} q'_{p+4}, \\ \alpha_{p+1}^2 \gamma_{p+3} &= \beta_{p+1} q'_{p+4}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les résultats qu'on trouve ainsi ne sont pas en désaccord avec ceux qu'offrent les exemples annoncés; mais ils n'en établissent pas la nécessité à tous égards.

Cela du reste intéresse peu pour ce qui regarde la recherche des racines communes et celle d'un plus grand commun diviseur, car les conditions à remplir dans ces questions sont d'une précision absolue.

31. Nous avons trouvé

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+3},$$

R'_{p+2} étant le polynôme qui se déduit de R_p et R_{p+1} comme R_1 de $F(x)$ et $f(x)$.

Soit R'_{p+3} le polynôme suivant, répondant à R_{p+3} , cherchons quelle relation il y a entre les polynômes R'_{p+3} , R_{p+3} .

Nous avons

$$R'_{p+3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} & \varepsilon_{p+1} \\ x_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p & \varepsilon_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \end{vmatrix} x^{n-p-3} + \dots$$

Nous pouvons, dans le premier coefficient, distinguer le terme

$$\varepsilon_{p+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1} \alpha_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix}$$

et y prendre

$$- \varepsilon_{p+1} \gamma_{p+1} x_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1} \gamma_{p+1} x_{p+1} \alpha_p^2.$$

Or, dans

$$\varepsilon_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a & \dots & a_{m-n+2p} & a_{m-n+2p+1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p} & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

il y a le terme

$$A_{m-n+2p+1} (-1)^p \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} = a A_{m-n+2p+1} (-1)^{m-n} a_p.$$

Dans γ_{p+1} il y a

$$A_{m-n+2p+1} (-1)^p \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} = a A_{m-n+2p+1} (-1)^{m-n} a_p.$$

Il résulte de là, dans le premier coefficient de R'_{p+1} , un terme égal à

$$a^2 A_{m-n+2p+1} A_{m-n+2p+1} a_p^2 a_{p+1}.$$

Mais le premier coefficient dans R_{p+1} étant

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix},$$

on en tire d'abord le terme

$$A_{m-n+2p+1} (-1)^{p+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+1} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix},$$

qui est

$$\alpha \Lambda_{m-n+2p+3} (-1)^{m-n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \dots & \dots \\ a & \dots & a_{m-n+2p+3} \\ \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+2p+3} \\ \cdot & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Lambda_{m-n+p+2} \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$\alpha \Lambda_{m-n+2p+3} \Lambda_{m-n+2p+2} (-1)^{m-n+p+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \dots \\ a & \dots & a_{m-n+2p+2} \\ 0 & \Lambda & \dots & \Lambda_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ 0 & \cdot & \dots & \Lambda_{m-n+p+1} \end{vmatrix} \\ = \alpha^2 \Lambda_{m-n+2p+3} \Lambda_{m-n+2p+2} \alpha_{p+1}.$$

Nous avons ainsi, dans les deux premiers coefficients de R'_{p+3} et R_{p+3} , deux termes homologues dont le rapport est α_p^4 ; par conséquent, la relation à obtenir est

$$R'_{p+3} = R_{p+3} \alpha_p^4.$$

Cela peut se continuer, par où l'on voit que, si l'on procède à partir de R_p et R_{p+1} comme à partir de $F(x)$ et $f(x)$, les R' consécutifs se compliquent à chaque pas d'un facteur α_p^2 relativement aux R correspondants.

Les résultats ne sont les mêmes que si α_p est l'unité. Quand on jugera à propos, pour un intérêt de calcul, par exemple celui d'éviter des déterminants d'ordre trop élevé, de procéder ainsi à partir de R_p et R_{p+1} , les résultats devront se simplifier, si α_p est différent de ± 1 , en les divisant par $\alpha_p^2, \alpha_p^4, \alpha_p^6, \dots$, de proche en proche.

32. Au cas de $m - n = 1$, on a

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ \Lambda & \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ \Lambda & \Lambda_1 & \Lambda_3 \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots$$

Si tous les coefficients de $f(x)$ ont un facteur commun K , on voit, par la composition de R_1 , que ce facteur y entre au carré dans tous les termes, de sorte que R_1 est alors divisible par K^2 .

De même R_2 se trouve alors divisible par K^3 , R_3 l'est par K^4 , et ainsi de suite.

Supposons en général, quel que soit $m - n$, que R_{p+1} soit divisible par un facteur K . Si l'on procède à partir de R_p, R_{p+1} comme à partir de $F(x), f(x)$, les polynômes $R'_{p+2}, R'_{p+3}, \dots$ seront divisibles par K^2, K^3, \dots , supposé que R_p et R_{p+1} soient de degrés consécutifs $n - p, n - p - 1$. Or on a trouvé

$$R'_{p+2} = R_{p+1} \alpha_p^2,$$

$$R'_{p+3} = R_{p+2} \alpha_p^3,$$

.....

Donc si α_p est premier avec K , le polynôme R_{p+2} sera divisible par K^2 , R_{p+3} le sera par K^3 , et ainsi de suite.

Mais, si K n'est pas premier avec α_p , il pourra ne pas diviser R_{p+2} .

Lorsque $m - n$ est > 1 , un facteur K commun à tous les coefficients de $f(x)$ se trouve porté dans R_1 à la puissance $m - n + 1$, dans R_2 à la puissance $m - n + 2, \dots$

Quant à un facteur K commun aux coefficients de $F(x)$, il est au moins à la première puissance dans R_1 , à la seconde dans R_2 , et ainsi de suite.

33. Observons encore que, si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ont un facteur commun, ce facteur se retrouve dans tous les termes de R_1 , dans tous ceux de R_2 , de R_3 , etc.

Si un diviseur est commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$, il se trouve, lorsque $m - n$ est ≥ 1 , au carré dans tous les termes de R_1 , de R_2, \dots . S'il est commun aux trois premiers coefficients de $F(x)$ et aux trois premiers de $f(x)$, il est au cube dans R_2 et les R suivants; il est de même à cette puissance dans R_1 , si $m - n$ est ≥ 2 .

En général, si les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, sa puissance de degré h divise R_1 et les R suivants, pourvu qu'on ait $2K > h - (m - n)$.

34. Lorsque m est égal à n , l'expression de R_1 est

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ A & A_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ A & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \dots,$$

celle de R_2 est

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \dots$$

Rien n'est à changer dans l'exposé qui précède, sauf qu'un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ n'apparaît au carré, en général, qu'à partir de R_2 .

35. Il nous reste à faire une remarque sur la possibilité de déduire des valeurs mêmes de R_1, R_2, \dots , qu'on vient d'étudier, ce que deviennent ces polynômes, lorsque $F(x)$ et $f(x)$ perdent leur premier terme par l'annulation de A et de a , puis quand ces fonctions perdent chacune leurs deux premiers termes, et ainsi de suite,

Observons d'abord que si l'on fait $a = 0$, A restant ≥ 0 , et a , étant ≥ 0 , il vient

$$R_1 = A a_1^{m-n} (-1)^{\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}} f(x),$$

$$R_2 = A (-1)^{m-n+2} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & \dots & a_{m-n+3} & \dots \\ A & \dots & \dots & A_{m-n+2} & \dots \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots = A (-1)^{m-n+2} r_1,$$

$$R_3 = A (-1)^{m-n+3} r_2,$$

.....

en appelant r_1, r_2, \dots les polynômes que donneront $F(x)$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$

De même, si l'on fait $A = 0$, a restant différent de zéro et A , étant ≥ 0 , on a

$$R_1 = a (-1)^{m-n} r_1,$$

$$R_2 = a (-1)^{m-n+1} r_2,$$

$$R_3 = a (-1)^{m-n+2} r_3,$$

.....

r_1, r_2, \dots étant là les polynômes déduits de

$$F(x) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots, \text{ et } f(x) = a x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$$

Supposons qu'il s'agisse de faire $A = 0$, $a = 0$ sans que A_1 et a_1 deviennent nuls à la fois.

Considérons le premier terme de R_2 , à savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & \dots & a_{m-n+3} \\ A & \dots & \dots & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & A & \dots & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2};$$

remplaçons-y a par h , A par H dans la première colonne, et partout ailleurs faisons-y $a = 0$, $A = 0$. Ce terme, devenant par là

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h & \dots & \dots & \dots & a_{m-n+3} \\ H & \dots & \dots & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & 0 & A_1 & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2},$$

sera

$$\begin{aligned} & (-1)^{m-n+1} h \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-n+2} \\ A_1 & \dots & \dots & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & A_1 & \dots & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} - (-1)^{m-n+1} H \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & A_1 & \dots & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} \\ & = (A_1 h - a_1 H) \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & \dots & a_{m-n+2} \\ A_1 & \dots & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2}. \end{aligned}$$

Or, du moment que A_1 et a_1 ne seront pas nuls à la fois, on pourra disposer de h et de H de façon à avoir $A_1 h - a_1 H \geq 0$; par la suppression de ce facteur, le premier terme de R_2 deviendra le premier terme de R_1 pour $F(x) = A_1 x^{n-1} + \dots$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + \dots$.

Cela s'appliquant aux autres termes comme au premier, on remplacera dans chaque terme de R_2 , à la première colonne, les facteurs a et A par l'unité, puis on remplacera par zéro tous les facteurs a et A restants, si $A_1 - a_1$ est ≥ 0 ; et, dans le cas contraire, on remplacera a et A de la première colonne par des nombres h et H tels, que

$A, h - a, H$ soit ≥ 0 . Après quoi, on divisera par le facteur commun $A, -a$, ou $hA, -Ha$. Le résultat sera le premier polynôme R susceptible de provenir de $F(x) = A, x^{m-1} + \dots$ et $f(x) = a, x^{n-1} + \dots$.

Le même mode de réduction donnera à la place de R , le polynôme R_2 , répondant à la même hypothèse, et ainsi de suite.

Si A_1 et a_1 se font nuls ensuite, sans qu'il en soit de même pour A_2 et a_2 à la fois, le même procédé pourra s'appliquer de nouveau, etc. Du reste, si A_1 ou a_1 , à part, ou après leur annulation commune, A_2 ou a_2 , à part, et ainsi de suite, devenait nul, il y aurait lieu d'appliquer ce qui a été présenté plus haut.

II.

Autre mode de formation des polynômes R_p .

36. Nous avons établi dans la première Partie de ce Mémoire, n° 20, un second mode de formation des conditions requises pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient p racines communes, et par suite une seconde manière d'obtenir l'équation qui donne ces racines communes, quand les conditions sont remplies, ou d'obtenir le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

Considérons au cas de $m > n$ les équations du n° 19; supposons que les équations qui suivent

$$f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad \dots, \quad x^{m-n+1}f(x) = 0$$

soient mises sous la forme

$$bx^{m-1} + b_1x^{m-2} + \dots + b_{m-1} = 0,$$

$$cx^{m-1} + c_1x^{m-2} + \dots + c_{m-1} = 0,$$

$$dx^{m-1} + d_1x^{m-2} + \dots + d_{m-1} = 0,$$

au cas de $n = m - 1$, ces dernières ne sont précédées que de $f(x) = 0$.

Formons des polynômes en suivant la règle qui donne, selon le n° 20, le plus grand commun diviseur de degré p , tour à tour pour

$p = n - 1, p = n - 2, \dots$ Les polynômes seront

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & \cdot & a_{m-n} \\ b & \dots & \cdot & b_{m-n} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} & a_{m-n+1} \\ b & \dots & b_{m-n-1} & b_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & \dots & \cdot & a_{m-n+1} \\ b & \dots & \cdot & b_{m-n+1} \\ c & \dots & \cdot & c_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-3} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ b & \dots & b_{m-n} & b_{m-n+2} \\ c & \dots & c_{m-n} & c_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-4} + \dots$$

Les conditions établies pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls et que le premier de R_p ne le soit pas.

37. Les polynômes R_p et les polynômes R_p que nous venons d'étudier répondent ainsi au même objet. Leurs coefficients d'ailleurs dépendent, de proche en proche, des mêmes coefficients de $F(x)$ et $f(x)$; ils sont, par conséquent, identiques, ou ont au moins leurs coefficients proportionnels. Leur dépendance consiste en effet dans les deux relations

$$R_{i,t+1} = (-1)^{m-n+1} R_{i,t},$$

$$R_{i,t} = R_{i,t}.$$

Pour les établir, considérons d'abord dans le premier coefficient de R_1 le terme en A_{m-n+1} . Comme l'expression générale de b_{m-n} est

$$b_{m-n} = A_1 a_{m-n} + A a_{m-n+1} - a A_{m-n+1},$$

ce terme est

$$- a A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \end{vmatrix}.$$

Dans R_1 le terme homologue est

$$A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} = A_{m-n+1} a (-1)^{m-n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix};$$

par conséquent on a

$$R_1 = R_1(-1)^{m-n+1};$$

d'où résulte, au cas de $m - n = 1$ ou $m - n = 2K + 1$,

$$R_1 = R_1.$$

De même, dans le premier coefficient de R_2 , l'élément c_{m-n+1} présente le terme $-aA_{m-n+3}$ et l'élément b_{m-n} le terme $-aA_{m-n+1}$. Comme on peut y dégager une partie égale à

$$c_{m-n+1}b_{m-n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix},$$

il s'y trouve un terme égal à

$$a^2 A_{m-n+3} A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix}.$$

Mais, dans le premier coefficient de R_2 , il y a le terme

$$-A_{m-n+3} \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix};$$

d'où se tire

$$\begin{aligned} & -A_{m-n+3} A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \end{vmatrix} \\ & = -A_{m-n+3} A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} a_1(-1)^{m-n+1} \\ & = a^2 A_{m-n+3} A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

de là

$$R_2 = R_2.$$

On trouve d'une manière analogue

$$\begin{aligned} R_3 &= R_3 (-1)^{m-n+1}, \\ R_4 &= R_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Lorsque $m - n$ est impair, la formule est ainsi

$$R_p = R_p,$$

et, lorsque $m - n$ est pair, on a d'une part

$$R_{2p} = R_p,$$

et, d'autre part,

$$R_{2p+1} = -R_{p+1}.$$

D'après cela, la formule du n° 26

$$R_i = \rho_1 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}$$

se change, au cas où $m - n$ est pair, en

$$R_i = -\rho_1 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

et, au cas où $m - n$ est impair, en

$$R_i = \rho_1 a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n+1}{2}}.$$

Au cas de $m - n = 1$, c'est avoir

$$R_i = -\rho_1 a^2.$$

La relation

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x) Q + R_i (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}$$

devient, lorsque $m - n$ est impair,

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x) Q + R_i (-1)^{\frac{m-n+1}{2}},$$

et, lorsque $m - n$ est pair, elle devient

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x) Q - R_i (-1)^{\frac{m-n}{2}}.$$

La relation

$$x^2 f(x) = R_i Q_1 - a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}} R_i$$

se change, lorsque $m - n$ est impair, en

$$\alpha^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} R_2,$$

et, au cas où $m - n$ est pair, en

$$\alpha^2 f(x) = R_1 (-Q_1) - a^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2}} R_2.$$

Enfin la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

p étant $=$ ou > 1 , devient, si $m - n$ est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, lorsque $m - n$ est pair, elle est, si p est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} (-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, si p est pair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} (-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

C'est toujours la même formule, au signe près de Q_{p+1} .

38. Nous avons supposé jusqu'ici $m > n$. Alors que l'on a $m = n$, les polynômes étant $F(x) = Ax^m + \dots + A_m$, $f(x) = ax^n + \dots + a_n$, représentons les équations de Bézout ou de Cauchy qui s'ensuivent, ramenées comme d'ordinaire à la forme entière, par

$$bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} = 0,$$

$$cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \dots + c_{m-1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Posons alors

$$R_1 = bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \dots + b_{m-1},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \dots,$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ d & d_1 & d_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \\ d & d_1 & d_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \dots$$

On a là

$$b = Aa_1 - aA_1 = \begin{vmatrix} A & A_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}, \quad b_1 = Aa_2 - aA_2 = \begin{vmatrix} A & A_2 \\ a & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots;$$

$$c = Aa_2 - aA_2,$$

$$c_1 = Aa_3 + A_1a_2 - aA_3 - a_1A_2,$$

$$c_2 = Aa_4 + A_1a_3 - aA_4 - a_1A_3,$$

.....

$$d = Aa_3 - aA_3,$$

$$d_1 = Aa_4 + A_1a_3 - aA_4 - a_1A_3,$$

$$d_2 = Aa_5 + A_1a_4 + A_2a_3 - aA_5 - a_1A_4 - a_2A_3,$$

.....

Comme on a dans ce cas

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ A & A_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ A & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \dots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \dots,$$

on voit d'abord que l'on a

$$R_1 = -R_2.$$

Le terme $a^2A_1A_2$, se trouvant dans le premier coefficient de R_2 comme dans le premier de R_1 , on en conclut

$$R_2 = R_1.$$

Dans le premier coefficient de R_2 , on trouve le terme

$$-aA_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

par

$$d_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$-aA_2bc, \quad \text{et de là} \quad a^2A_1A_2b,$$

puis

$$-a^3A_1A_2A_3.$$

Dans le premier coefficient de R_3 , le terme homologue est

$$a^3 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_1.$$

Il s'ensuit

$$R_3 = -R_3.$$

La formule générale est encore, d'une part,

$$R_{p+1} = (-1)^{m-n+1} R_{p+1},$$

et de l'autre

$$R_{2p} = R_{2p}.$$

Ajoutons qu'on a les relations

$$a F(x) = A f(x) - R_1,$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 - Q_1 - a R_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{p-1}^2 R_p = R_{p+1} - Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

$$\dots \dots \dots$$

qui sont des précédentes pour $m - n = 0$.

III.

39. Le cas de $m - n = 1$ présente un intérêt particulier par l'application au théorème de Sturm.

Nous avons alors, comme on l'a vu,

$$a_1 F(x) = f(x) Q - R_1,$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - R_2,$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

D'après ces relations, la suite des fonctions à coefficients réels

$$F(x), f(x), R_1, R_2, \dots$$

jouit de cette propriété que, si une valeur réelle de x annule l'une des fonctions intermédiaires sans annuler les fonctions contiguës, ces deux fonctions, qui la comprennent, acquièrent, pour la valeur de x , des valeurs de signes contraires. C'est l'un des fondements du théorème de Sturm.

Quand, dans un intervalle de α à β , les différentes racines de $F(x)$ sont autres que celles de $f(x)$, si, d'un même côté de chacune des premières, les fonctions $F(x)$, $f(x)$ sont de signes contraires, et du même signe de l'autre côté, il s'ensuit que le nombre des racines de $F(x)$ comprises entre α et β est la différence des deux nombres de variations que présente pour α et β la suite des valeurs correspondantes prises par les polynômes

$$F(x), f(x), R_1, R_2, \dots,$$

pourvu que cette suite soit limitée à un terme constant, en ne changeant pas de signe dans l'intervalle considéré.

Lorsque $f(x)$ se prend égal à la dérivée de $F(x)$, les polynômes R_1, R_2, R_3, \dots , ou bien R_1, R_2, R_3, \dots , pourront donc se prendre à la place des fonctions de Sturm V_2, V_3, \dots .

Donc, si l'on pose

$$V = Ax^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m,$$

$$V_1 = ax^{m-1} + a_1x^{m-2} + \dots + a_{m-1},$$

V_1 étant la dérivée de V ou cette dérivée à un facteur près positif, les coefficients étant réels, et qu'on développe les équations

$$\frac{Ax + A_1}{a} = \frac{A_2x^{m-2} + \dots + A_m}{a_1x^{m-2} + \dots + a_{m-1}},$$

$$\frac{Ax^2 + A_1x + A_2}{ax + a_1} = \frac{A_3x^{m-3} + \dots + A_m}{a_2x^{m-3} + \dots + a_{m-1}},$$

.....,

en

$$bx^{m-1} + b_1x^{m-2} + \dots + b_{m-1} = 0,$$

$$cx^{m-1} + c_1x^{m-2} + \dots + c_{m-1} = 0,$$

.....,

les fonctions de Sturm reviendront aux polynômes suivants :

$$R_1 = \left| \begin{array}{cc} a & a_1 \\ b & b_1 \end{array} \right| x^{m-2} + \left| \begin{array}{cc} a & a_2 \\ b & b_2 \end{array} \right| x^{m-3} + \dots + \left| \begin{array}{cc} a & a_{m-1} \\ b & b_{m-1} \end{array} \right|,$$

$$R_2 = \left| \begin{array}{ccc} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{array} \right| x^{m-3} + \left| \begin{array}{ccc} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \end{array} \right| x^{m-4} + \dots + \left| \begin{array}{ccc} a & a_1 & a_{m-2} \\ b & b_1 & b_{m-2} \end{array} \right|,$$

.....

Sous une autre forme, ces polynômes sont

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \dots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \dots,$$

.....

Si V_1 est la dérivée de V , tout au plus divisée par m ou un facteur de m , on voit que les polynômes R_1, R_2, R_3, \dots sont tous divisibles par A . La suppression de ce facteur pourra se faire sur les éléments de la première colonne dans chaque terme; rien ne sera d'ailleurs à changer, s'il est positif. Quand il sera négatif, c'est par sa valeur absolue qu'on divisera, à moins qu'on ne préfère changer les signes de $F(x)$ et de $F'(x)$.

D'autres simplifications pourront être à faire. Par exemple, un facteur commun à A et A_1 , se retrouvant dans tous les termes de chaque polynôme, il y aura lieu de les diviser par sa valeur absolue.

Quand, dans la recherche des fonctions de Sturm par des divisions successives, le degré s'abaisse de plus d'une unité, le même abaissement se présente dans le calcul des fonctions R . La suite des fonctions obtenues, quoi qu'il arrive d'ailleurs, continuera à jouir des mêmes propriétés que lorsqu'il en est autrement, puisqu'une pareille circonstance ne sera qu'un cas limite du cas général.

Les premiers termes des fonctions R_1, R_2, \dots , tels termes qu'on veut, peuvent se calculer indépendamment des autres. On a par les premiers, sous une forme ou sous l'autre, des expressions générales, en fonction des coefficients de l'équation $F(x) = 0$, pour les conditions de réalité de toutes les racines, quand elles sont simples.

Deux polynômes qui se suivent R_p, R_{p+1} ayant leurs degrés consécutifs, si l'on opère à partir de ces polynômes comme à partir de $F(x)$, $f(x)$, on a vu (n° 31) que les polynômes $R'_{p+2}, R'_{p+3}, \dots$, qui s'ensui-

vent, sont liés aux polynômes correspondants R_{p+2}, R_{p+3}, \dots par les relations

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2}, \quad R'_{p+3} = \alpha_p^4 R_{p+3}, \quad \dots$$

De pareils polynômes, quand on le jugera à propos, pourront se calculer à la place des polynômes R_{p+2}, R_{p+3}, \dots ; mais, si α_p est différent de ± 1 , il y aura lieu de les diviser par $\alpha_p^2, \alpha_p^4, \dots$.

IV.

40. Les premiers coefficients de ces polynômes R_1, R_2, \dots lorsque $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, sont précisément, au cas de $A = 1$, les nombres p_μ de M. Borchardt.

Les valeurs de ces coefficients sont en effet

$$A^3 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad A^5 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

S_i désignant la somme des puissances de degré i des racines de $F(x)$.

Pour le démontrer, nous allons prendre les premières expressions des polynômes R indiquées au n° 22.

Le premier coefficient de R_1 peut successivement se transformer comme il suit :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} \\ & = A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 \\ -A_1 & -2A_2 \end{vmatrix} \\ & = A \begin{vmatrix} mA & -(m-1)AS_1 \\ AS_1 & AS_2 - AS_1^2 \end{vmatrix} \\ & = A \begin{vmatrix} mA & AS_1 \\ AS_1 & AS_2 \end{vmatrix} = A^3 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pour celui de R_2 , on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 & AS_4 + A_1S_3 + A_2S_2 + A_3S_1 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ 0 & A^2S_2 + AA_1S_1 + A_1^2 & A^2S_3 + AA_1S_2 + AA_2S_1 + A_1A_2 & A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 + AA_3S_1 + A_1A_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3 + AA_1S_2 & A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 + A_1S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 + AA_1S_3 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 \end{vmatrix} = A^3 \begin{vmatrix} S_2 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_4 \end{vmatrix}$$

Pour le premier coefficient de R_3 , on trouve de même

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 \\
 o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 \\
 mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 & (m-6)A_6 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\
 o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
 o & o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4
 \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & o & o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\
 o & o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\
 o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\
 o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
 o & o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4
 \end{array} \right| \\
 \\
 = A \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\
 o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\
 -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
 o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4
 \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\
 o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\
 o & -2AA_2+A_1 & -3AA_3+A_2A_1 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
 o & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4
 \end{array} \right| \\
 \\
 = A \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\
 -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\
 -2AA_2+A_1 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5
 \end{array} \right| \\
 \\
 = A \left| \begin{array}{ccccccc}
 o & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\
 o & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\
 -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\
 -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\
 A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ 0 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3-2A_1^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_2A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -3AA_3+AA_1 & -4AA_4-2A_1A_3+2A_1^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_2A_4 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2+AA_1S_1+A_1^2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3-A_1A_2S_1 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 & A^2S_6+2AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3 \\ & -3AA_3 & -4A_1A_4-A_1A_3S_1 & +A_1A_2S_3+A_1^2S_4+A_1A_3S_5 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5-AA_1S_4+AA_2S_3 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 \\ AS_1 & AS_2 & A^2S_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 & AS_4 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 & A^2S_6 \end{vmatrix} = A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Les transformations, on le voit, se compliquent de plus en plus. Il nous semble inutile de les poursuivre au delà.

En se servant des autres expressions de R_1, R_2, \dots , on obtient les mêmes résultats, par des calculs analogues qui offrent moins de régularité.

V.

41. Nous terminerons cette étude par le développement de quelques exemples :

1° Soit

$$F(x) = x^3 + px + q,$$

$$fx = 3x^2 + p.$$

Il s'ensuit

$$\frac{x}{3} = \frac{px + q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{x^2 + p}{3x} = \frac{q}{p};$$

d'où

$$3x^2 + p, \quad -2px - 3q, \quad px^2 - 3qx + p^2.$$

De là

$$R_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2p \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3 & p \\ 0 & -3q \end{vmatrix} = -6px - 9q,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & p \\ 0 & -2p & -3q \\ p & -3q & p^2 \end{vmatrix} = p^2(-6p) + 3q(-9q) + p \cdot 2p^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

2° Soit

$$F(x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

$$F'(x) = 3ax^2 + 2a_1x + a_2;$$

d'où

$$\frac{ax + a_1}{3a} = \frac{a_2x + a_3}{2a_1x + a_2}, \quad \frac{ax^2 + a_1x + a_2}{3ax + 2a_1} = \frac{a_3}{a_1},$$

puis

$$3ax^2 + 2a_1x + a_2,$$

$$2aa_1x^2 + (2a_1^2 - 2aa_2)x + a_1a_2 - 3aa_3,$$

$$aa_2x^2 + (a_1a_2 - 3aa_3)x + a_2^2 - 2a_1a_3,$$

et par là

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ 2aa_1 & a_1a_1 - 3aa_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix} \\ &= -2a(3aa_2 - a_1^2)x - a(9aa_3 + a_1a_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_2 - 3aa_3 \\ aa_2 & a_1a_2 - 3aa_3 & a_2^2 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -2a_1a_3 \end{vmatrix} \\ &= a(18aa_1a_2a_3 - 4a_1^2a_3 - 4a_2^2a_1 + a_1^2a_2^2 - 27a^2a_3^2). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$F(x) = ax^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}R_1 &= \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 3a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 2aa_1 & 3a_1a_2 - aa_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 \end{vmatrix} \\ &= 2a(a_1^2 - aa_2)x + a(a_1a_2 - aa_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{27}R_2 &= \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -aa_3 \\ -2aa_2 & -3a_1a_2 - aa_3 & -2a_1a_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ 0 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_2 - aa_3 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 2a_1^2 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} \\ &= 4a(a_1^2 - aa_2)(a_2^2 - a_1a_3) - a(a_1a_2 - aa_3)^2. \end{aligned}$$

3° Soit

$$F(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

$$F'(x) = 4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3;$$

d'où

$$\begin{aligned} &4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3, \\ &3aa_1x^3 + (3a_1^2 - 2aa_2)x^2 + (2a_1a_2 - 3aa_3)x + a_1a_3 - 4aa_4, \\ &2aa_2x^2 + (2a_1a_2 - 3aa_3)x^2 + (2a_2^2 - 2a_1a_3 - 4aa_4)x + a_2a_3 - 3a_1a_4, \\ &aa_3x^2 + (a_1a_3 - 4aa_4)x^2 + (a_2a_3 - 3a_1a_4)x + a_3^2 - 2a_1a_4, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_2 \\ 3aa_1 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ 3aa_1 & a_1a_3 - 4aa_4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ -aa_1 & -4aa_4 \end{vmatrix}, \\
 R_2 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ 3aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix} \\
 R_3 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 3aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \\ aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 & a_2a_3 - 3a_1a_4 & a_3^2 - 2a_2a_4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -2a_1a_3 - 4aa_4 & -a_2a_3 - 3a_1a_4 & -2a_2a_4 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Si l'on prend

$$F(x) = ax^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 \frac{R_1}{16} &= 3 \begin{vmatrix} a & a \\ -aa_1 & -aa_2 \end{vmatrix} x^2 + 3 \begin{vmatrix} a & a_3 \\ -aa_1 & -aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_4 \\ -aa_1 & -aa_4 \end{vmatrix} \\
 &= 3a(a_1^2 - aa_2)x^2 + 3a(a_1a_3 - aa_3)x + a(a_1a_4 - aa_4), \\
 \frac{R_2}{4^2 \cdot 3} &= \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ -aa_1 & -aa_2 & -3aa_3 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -aa_2 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & 3a_1a_2 - 3aa_3 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & a_1a_3 - aa_4 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 3a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix} \\
 &= a[(a_1^2 - aa_2)(9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3) - 3(a_1a_2 - aa_3)^2] x \\
 &\quad + a[3(a_1^2 - aa_2)(a_1a_3 - a_1a_4) - (a_1a_2 - aa_3)(a_1a_3 - aa_4)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{R_3}{4} &= \begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -3aa_2 & -3aa_3 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -6a_1a_2 - 3aa_3 & -8a_1a_3 - aa_4 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -8a_1a_3 - aa_4 & -6a_2a_3 - 3a_1a_4 & -3a_2a_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 0 & 3(a_1^2 - aa_1) & 3(a_1a_2 - aa_2) & a_1a_3 - aa_4 \\ 0 & 3(a_1a_2 - aa_2) & 9a_1^2 - 8a_1a_3 - aa_4 & 3(a_1a_3 - a_1a_4) \\ 0 & a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) & 3(a_3^2 - a_2a_4) \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} 3(a_1^2 - aa_1) & 3(a_1a_2 - aa_2) & a_1a_3 - aa_4 \\ 3(a_1a_2 - aa_2) & 9a_1^2 - 8a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) \\ a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) & 3(a_3^2 - a_2a_4) \end{vmatrix} \\
&= [9a(a_1^2 - aa_1)(a_3^2 - a_2a_4) - a(a_1a_3 - aa_4)^2] (9a_1^2 - 8a_1a_3 - aa_4) \\
&\quad + 18a(a_1a_3 - aa_4)(a_1a_2 - aa_2)(a_2a_3 - a_1a_4) \\
&\quad - 27a(a_1^2 - aa_1)(a_2a_3 - a_1a_4)^2 - 27a(a_3^2 - a_2a_4)(a_1a_3 - aa_4)^2.
\end{aligned}$$

Remarque. — Quand on pose

$$\begin{aligned}
F(x) = \varphi(x, y) &= \Lambda x^m + m\Lambda_1 x^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1.2} \Lambda_2 x^{m-2}y^2 + \dots \\
&\quad + \frac{m(m-1)}{1.2} \Lambda_{m-1} x^2 y^{m-2} + m\Lambda_{m-1} x y^{m-1} + \Lambda_m y^m,
\end{aligned}$$

comme l'on a

$$mF(x) = x\varphi'_x(x, y) + y\varphi'_y(x, y) \quad \text{et} \quad F(x) = \varphi'_x(x, y).$$

y s'estimant égal à l'unité, la recherche d'un plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$ revient à le chercher entre $\varphi'_x(x, y)$ et $\varphi'_y(x, y)$.

Quand on prend

$$\varphi(x, y) = ax^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

on a

$$\frac{1}{3}\varphi'_x(x, y) = ax^2 + 2a_1xy + a_2y^2,$$

$$\frac{1}{3}\varphi'_y(x, y) = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2,$$

de là

$$\frac{a}{a_1} = \frac{2a_1x + a_2y}{2a_1x + a_2y} \quad \text{et} \quad \frac{ax + 2a_1y}{a_1x + 2a_2y} = \frac{a_2}{a_3}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & 3(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2)y, \\ & (aa_3 - a_1a_2)x + 2(a_1a_3 - a_2^2), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -R_1 &= 2(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2), \\ R_2 &= \begin{vmatrix} 2(aa_2 - a_1^2) & aa_3 - a_1a_2 \\ aa_3 - a_1a_2 & 2(a_1a_3 - a_2^2) \end{vmatrix} \\ &= 4(aa_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (aa_3 - a_1a_2)^2. \end{aligned}$$

On trouve ainsi les mêmes valeurs de R_1 et de R_2 que ci-dessus, sauf des facteurs numériques positifs et le facteur a . On peut donc, même pour l'application du théorème de Sturm, opérer ainsi, en prenant soin d'avoir a positif.

Pareillement, si l'on a

$$\varphi(x, y) = ax^4 + 4ax^3y + 6ax^2y^2 + 4axy^3 + a^2y^4,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\varphi'_x(xy) &= ax^3 + 3ax^2y + 3axy^2 + ay^3, \\ \frac{1}{4}\varphi'_y(xy) &= ax^3 + 3ax^2y + 3axy^2 + ay^3, \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} & 3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)xy + (aa_4 - a_1a_3)y^2, \\ & 3(aa_3 - a_1a_2)x^2 + (8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4)xy + 3(a_1a_4 - a_2a_3)y^2, \\ & (aa_4 - a_1a_3)x^2 + 3(a_1a_4 - a_2a_3)xy + 3(a_2a_4 - a_3^2)y^2, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} -R_1 &= 3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)x + aa_4 - a_1a_3, \\ R_2 &= \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \end{vmatrix}, \\ -R_3 &= \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \\ aa_4 - a_1a_3 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) & 3(a_2a_4 - a_3^2) \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

au facteur près a , les mêmes déterminants que ci-dessus se retrouvent ainsi.

On a par là une façon plus simple encore de procéder dans la recherche des fonctions de Sturm ou de fonctions équivalentes, pourvu qu'on ait soin d'avoir positif le premier terme de $F(x)$. Dans le cas contraire, il n'y aurait du reste qu'à changer les signes des termes dans $F(x)$ et $F'(x)$, pour joindre ces fonctions aux résultats obtenus, ou à changer ceux des résultats obtenus.

4° Soit

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \varphi(x, y).$$

De là

$$\varphi'_x(x, y) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$

$$\varphi'_y(x, y) = x^6 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

d'où l'on tire

$$-17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37,$$

$$-7x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 8x + 14,$$

$$3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3,$$

$$-16x^4 + 8x^3 + 27x^2 - 16x - 7,$$

$$37x^4 + 28x^3 - 27x^2 - 14x + 7,$$

et de là

$$-R_1 = -17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37,$$

$$\frac{1}{3}R_2 = -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7,$$

$$-\frac{1}{15}R_3 = 86x^2 - 138x - 31,$$

de sorte qu'on a ainsi la suite de fonctions

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$F'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$

$$R_1 = 17x^4 + 14x^3 - 27x^2 + 32x - 37,$$

$$\frac{1}{3}R_2 = -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7,$$

$$\frac{1}{15}R_3 = -86x^2 + 138x + 31.$$

Au lieu de continuer par le calcul de déterminants du quatrième ordre, opérons directement à partir de $-44x^3 + 114x^2 - 120x + 7$ et $-86x^2 + 138x + 31$.

Les fonctions intermédiaires qui s'ensuivent, divisées par 8.11 et 2.11, sont

$$-69x^2 + 46x + 47,$$

$$-62x^2 + 188x - 213,$$

de sorte qu'il y a à considérer

$$\begin{aligned} & -86x^3 + 138x^2 + 31, \\ & -69x^2 + 46x + 47, \\ & -62x^2 + 188x - 213; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_1^* &= 11(506x - 173), \\ R_2^* &= -11^2 \cdot 2 \cdot 4717. \end{aligned}$$

5° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^7 + 2x^6 - x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 2, \\ F'(x) &= f'(x) = 7x^6 + 12x^5 - 5x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 4x + 4. \end{aligned}$$

Les fonctions intermédiaires sont, avec $f(x)$,

$$\begin{aligned} & 12x^6 + 26x^5 + 2x^4 - 20x^3 - 28x^2 - 16x + 22, \\ & -5x^6 + 2x^5 + 33x^4 + 24x^3 - 31x^2 - 30x + 20, \\ & -16x^6 - 20x^5 + 24x^4 + 18x^3 + 16x^2 + 24x - 26, \\ & -9x^6 - 28x^5 - 31x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 26x - 44, \\ & 4x^6 - 16x^5 - 30x^4 + 24x^3 + 26x^2 + 0x - 10; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_1 &= 2(19x^4 + 37x^3 + 26x^2 - 44x^2 - 80x + 53), \\ R_2 &= 4 \cdot 3(28x^4 - 6x^3 - 41x^2 + 55x - 21), \\ R_3 &= 16 \cdot 9(-68x^3 + 23x^2 + 159x - 91). \end{aligned}$$

On voit dans R_1 le facteur 2, premier avec le premier coefficient 7 de $f(x)$. Son carré est facteur dans R_2 , puis, au lieu de sa troisième puissance, c'est la quatrième qui divise R_3 . De même le facteur 3 de R_2 est au carré dans R_3 .

En opérant là directement à partir de

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \cdot 3} R_2 &= 28x^4 - 6x^3 - 41x^2 + 55x - 21, \\ \frac{1}{16 \cdot 9} R_3 &= -68x^3 + 23x^2 + 159x - 91, \end{aligned}$$

on trouve les fonctions

$$\begin{aligned} & 322x^3 + 763x^2 + 119x - 441, \\ & 2226x^3 + 119x^2 - 4333x + 2107, \\ & -1274x^3 - 441x^2 + 2107x - 833; \end{aligned}$$

d'où

$$R_1 = 2.296(5 - x^2 - x + 1) = 2.7^2.11^2.5(-x^2 - x + 1).$$

On peut diviser par 7 les fonctions considérées, ce qui donne

$$\begin{aligned} &46x^3 + 109x^2 + 17x - 63, \\ &318x^3 + 17x^2 - 619x + 301, \\ &-182x^3 - 63x^2 + 301x - 119; \end{aligned}$$

il en résulte

$$R_7 = 2.4235(-x^2 - x + 1) = 2.7.5.11^2(-x^2 - x + 1),$$

puis

$$R_7 \begin{vmatrix} -68 & 23 & 159 \\ 46 & 109 & 17 \\ 318 & 17 & -619 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \text{»} & \text{»} & -91 \\ \text{»} & \text{»} & -63 \\ \text{»} & \text{»} & 301 \end{vmatrix} = 0x + 0.$$

D'après quoi, $x^2 + x - 1$ est un plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $F'(x)$.

Si l'on pose là

$$\varphi(x, y) = x^2 + 2x^2y - x^3y^2 - 4x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y^5 + 4xy^6 - 2y^7,$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= 7x^6 + 12x^5 - 5x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 4x + 4, \\ \varphi'_y(x, y) &= 2x^2 - 2x^3 - 12x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 24x - 14; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les polynômes

$$\begin{aligned} &-19x^4 - 37x^4 - 26x^3 + 44x^2 + 80x - 53, \\ &-37x^3 - 103x^4 - 44x^3 + 131x^2 + 95x - 80, \\ &-26x^3 - 44x^4 + 65x^3 + 16x^2 - 116x + 59; \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} -R_1 &= -19x^4 - 37x^4 - 26x^3 + 44x^2 + 80x - 53, \\ \frac{1}{2}R_2 &= 28x^4 - 6x^2 - 41x^2 + 55x - 21, \\ -\frac{1}{9.98}R_3 &= 68x^3 - 23x^2 - 159x + 91. \end{aligned}$$

On voit que ce procédé abaisse l'ordre des déterminants d'une unité.

6° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= 30x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 5x + 10, \\ f(x) &= 12x^3 - 4x^2 + x - 3. \end{aligned}$$

Les polynômes d'où se déduisent les fonctions R sont

$$\begin{aligned} & 12x^3 - 4x^2 + x - 3, \\ & - 120x^3 + 54x^2 - 45x - 75, \\ & 30x^3 - 45x^2 - 92x + 31, \\ & - 90x^3 - 75x^2 + 31x + 5. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} R_1 &= 12 \cdot 7 \cdot (2x^2 - 5x - 15), \\ R_2 &= -12 \cdot 7^2 \cdot 4(13x + 16), \\ R_3 &= 7^2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 1376^2 + 7^3 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 983. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que le facteur 6 commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se retrouve dans R_1, R_2, R_3 . Le facteur 7, apparu dans R_1 , étranger au premier coefficient de $f(x)$, est porté au carré dans R_2 , et au cube dans R_3 .

7° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 - x^2 - 2x^2 + 3x + 2, \\ f(x) &= x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$\begin{aligned} & x^3 + 0x^2 + 0x^2 - 2x - 1, \\ & 0x^3 + 0x^2 + 0x^2 - 3x - 1, \\ & 0x^3 + 0x^2 - 2x^2 - x + 0, \\ & - 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 4x + 2, \\ & - x^3 - x^2 + 0x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} R_1 &= 0x^3 + 0x^2 - 2x - 1 = -2x - 1, \\ R_2 &= 0x^2 + 0x + 0 = 0, \\ R_3 &= 8x + 4 = 4(2x + 1), \\ R_4 &= 1. \end{aligned}$$

On voit que R_1 est du premier degré au lieu d'être du troisième; puis R_2 est nul, R_3 est bien du premier degré, c'est le produit de R_1 par -4 ; mais ce facteur ne se présente pas dans R_4 .

8° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + x^2 - x - 2, \\ f(x) &= x^3 + x^2 - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes à considérer étant

$$\begin{aligned} & x^5 + x^3 - 1, \\ & x^3 - x^2 + 1, \\ & x^4 + x^4 + x - 1, \\ & -x^4 + 2, \\ & x^3 + 3x - 1, \\ & -x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} R_1 &= +x^3 - x^2 + 1, \\ R_2 &= -x^3 + x^2 - 1, \\ R_3 &= -x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi R_1 est là du troisième degré au lieu d'être du quatrième, et R_2 en est le produit par -1 .

9° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3, \\ f(x) &= x^6 + x^4 - x - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes intermédiaires sont, en y comprenant $f(x)$,

$$\begin{aligned} & x^6 + x^4 - x - 1, \\ & x^3 - x^2 + 1, \\ & x^6 + 2x^4 - x^3 - x - 1, \\ & x^3 - x^4 + x^2 + 1, \\ & -x^5 + 2x + 1, \\ & -x^4 + 2x^2 + x, \\ & -x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2; \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} R_1 &= x^3 - x^2 + 1, \\ R_2 &= 0, \\ R_3 &= -x^3 + x^2 - 1, \\ R_4 &= -2x, \\ R_5 &= 6x, \\ & \dots \end{aligned}$$

10° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^7 + x^6 - x^4 - x^2 - x - 1, \\ f(x) &= x^6 + x^5 - x^3 - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes intermédiaires sont

$$\begin{aligned} & x^6 + x^5 - x^3 - 1, \\ & -x^3 - x^2 + x + 1, \\ & -x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x + 1, \\ & -x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1, \\ & x^4 + x^3 - x - 1, \\ & -x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1, \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} R_1 &= -x^2 + 1, \\ R_2 &= 0, \\ R_3 &= 0, \\ R_4 &= x^2 - 1, \\ R_5 &= 0. \end{aligned}$$

D'après le dernier résultat, le polynôme $x^2 - 1$ est là le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Ces exemples, par leur variété, répondent suffisamment, je l'espère, aux faits démontrés jusqu'ici.

TROISIÈME PARTIE.

I.

La résolution de deux équations entières en x et y , $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, se présente sous un jour nouveau, quand on y applique les considérations et les procédés de calcul que nous avons exposés.

Nous n'avons pas à parler du cas où un diviseur, fonction de x ou de y , seul appartiendrait à l'un des polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ou à tous les deux. Ainsi nous supposerons qu'aucun des deux polynômes n'admet un pareil diviseur.

Si on les ordonne par rapport à x , ils constitueront deux fonctions entières de x , de degrés m et n ($m > n$), $F(x)$, $f(x)$. Les coefficients,

pour toute valeur de module fini, déterminée, attribuée à y , auront des valeurs analogues.

Résoudre le système des deux équations, c'est trouver toute valeur de y , telle que pour cette valeur les deux polynômes $F(x)$, $f(x)$ s'annulent à la fois par une ou plusieurs déterminations correspondantes de x , admettent donc p racines communes ($p \leq n$), finies, déterminées. Ainsi posée, la question est tout entière dans le calcul des polynômes R_1, R_2, \dots ou des polynômes R_1, R_2, \dots , précédemment définis. Ces polynômes seront des fonctions entières de x , de degrés décroissants, ayant pour coefficients des fonctions entières de y .

Il a été reconnu qu'un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se reproduit dans tous les polynômes R . Si ces premiers coefficients, comme fonctions de y , ne sont pas premiers entre eux, la fonction de y , qui en sera le plus grand commun diviseur, se retrouvera donc dans chacun des polynômes R . Il convient, dans notre exposition, de distinguer ce cas du cas général. Nous entendrons qu'il soit d'abord écarté, sauf à y revenir.

Par le calcul des polynômes R_1, R_2, \dots , on aboutira à un résultat indépendant de x , constant ou fonction de y , ou bien à un polynôme ayant ses coefficients tous nuls, et de telle sorte qu'il en soit de même des polynômes suivants; ce qui aura lieu, si le polynôme précédent est en x du degré correspondant à son indice.

Dans le premier cas, le résultat final R_n sera le résultant dit de Sylvester ou de Cauchy.

Si l'on attribue à y une valeur qui l'annule, il y aura p valeurs de x correspondantes, une au moins, qui seront racines communes des polynômes $F(x)$, $f(x)$.

En effet, on sait que, les racines de $F(x)$ étant x_1, x_2, \dots, x_m , celles de $f(x)$ étant x'_1, x'_2, \dots, x'_n , si l'on pose $\varphi = F(x'_1) F(x'_2) \dots F(x'_n)$ et $\psi = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_m)$, on a la double relation

$$a^n \varphi = A^n \psi (-1)^{mn} = \pm R_n.$$

D'après quoi, si R_n s'annule, les produits $a^n \varphi$, $A^n \psi$ s'annulent à la fois. Mais, lorsque, comme dans l'hypothèse faite, les coefficients a et A n'ont en y aucun diviseur commun, ce sont φ et ψ qui s'annulent; donc alors toute valeur de y , qui annule R_n , est telle qu'il y correspond au

moins une valeur de x , formant avec elle une solution commune aux équations $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Ainsi, quand le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sont premiers entre eux, les valeurs de y , qui entrent dans les solutions communes aux deux équations proposées, ne peuvent provenir que de l'équation $R_n = 0$, et à toute racine de $R_n = 0$ il correspond au moins une solution.

Or, lorsque les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, les coefficients ayant des valeurs déterminées, ont p racines communes, il est établi que ces racines sont données par $R_{n-p} = 0$, et qu'elles annulent tous les R d'indices inférieurs à $n - p$, tandis que les R d'indices supérieurs sont nuls identiquement.

En conséquence, si $y = y_1$ est une racine de l'équation $R_n = 0$ et qu'il y corresponde p racines communes de $F(x)$ et de $f(x)$, la substitution de $y = y_1$ dans R_{n-1} , R_{n-2} , ..., R_{n-p+1} donnera des résultats nuls; mais, par la substitution dans R_{n-p} , on aura un polynôme entier en x du degré p qui, égalé à zéro, donnera les p racines.

Donc, si l'on substitue y_1 dans R_{n-1} , R_{n-2} , ..., le premier de ces polynômes qui ne s'annulera pas sera d'un degré correspondant à son indice, par rapport à x . En l'égalant à zéro, il donnera les valeurs de x correspondant à y_1 , en nombre égal à la différence entre n et son indice.

Quand il n'y aura qu'une valeur de x pour $y = y_1$, c'est par $R_{n-1} = 0$ qu'elle sera donnée. C'est là le cas général.

Mais, lorsque plusieurs valeurs de x , en nombre p , répondent à une même racine y_1 de R_n , les coefficients de R_{n-1} , R_{n-2} , ..., R_{n-p+1} , s'annulant pour cette racine, ne sont pas premiers entre eux.

Or, quand les coefficients de R_{n-p+1} ont un diviseur commun $\psi(y)$, qui soit premier avec le premier coefficient de R_{n-p} , le polynôme suivant R_{n-p+2} est divisible par $\psi^2(y)$, le polynôme R_{n-p+3} l'est par $\psi^3(y)$, et ainsi de suite.

C'est pourquoi, si l'on considère les polynômes R_1 , R_2 , ... dans l'ordre où on les calcule, une valeur y_1 de y , à laquelle répondent p valeurs de x , s'accusera par le fait même que $y - y_1$ divise le polynôme R_{n-p+1} , sans diviser le premier coefficient de R_{n-p} . Les polynômes suivants R_{n-p+2} , ... seront respectivement divisibles par $(y - y_1)^2$, $(y - y_1)^3$,

Lorsque le polynôme R_{n-p+1} présentera un diviseur $\psi(y)$ qui soit premier avec le premier coefficient du polynôme R_{n-p} , ce qui suppose ce premier coefficient différent de zéro, chaque racine de $\psi(y) = 0$, substituée dans R_{n-p} , conduira par l'équation $R_{n-p} = 0$ à p valeurs de x correspondantes. On aura par là le système $\psi(y) = 0$, $R_{n-p} = 0$. Les polynômes R_{n-p+1} , R_{n-p+2} , ... devront ensuite être simplifiés, en les divisant successivement par $\psi(y)$, $\psi^2(y)$, $\psi^3(y)$, ...

Si un diviseur $y - y_1$ de R_{n-p+1} appartient au premier coefficient de R_{n-p} , cette circonstance sera, pour $y = y_1$, celle où, dans la suite des polynômes R , le degré s'abaisse de plus d'une unité. Alors, quand R_{n-p+1} est le premier polynôme qui s'annule pour $y = y_1$, et que le degré en x du polynôme R_{n-p} devient $p - q$ pour cette valeur de y , le polynôme R_{n-p+q} ne s'annulera plus pour $y = y_1$. Jusque-là, il n'y aura donc pas à tenir compte de cette valeur de y .

Si un diviseur $\psi(y)$ de R_{n-p+1} , sans diviser le premier coefficient de R_{n-p} , n'est pas premier avec lui, on devra chercher leur plus grand commun diviseur δ , et le changer en $\delta\psi_1(y)$. Ce qui précède s'appliquera au facteur $\psi_1(y)$, premier avec le premier coefficient de R_{n-p} . Il n'y aura pas à s'occuper de δ , à moins qu'on ne veuille reconnaître ce qui correspond à ses différentes racines dans la suite des polynômes R .

D'après cela, si l'on désigne par p, p', p'', \dots , en ordre décroissant, les nombres de valeurs de x qui correspondent à des valeurs de y , le polynôme R_{n-p+1} est le premier polynôme qui présente un diviseur $y - y_1$ n'appartenant pas au premier coefficient du polynôme précédent R_{n-p} , ou plus généralement un diviseur $\psi(y)$ premier avec le premier coefficient de R_{n-p} , ou, à défaut d'être tel, qui soit le produit de leur plus grand commun diviseur δ et de $\psi_1(y)$. Alors pour $y = y_1$, ou pour chaque racine, soit de $\psi(y)$, soit de $\psi_1(y)$, il y a p valeurs de x correspondantes données par $R_{n-p} = 0$; puis les polynômes suivants devront être simplifiés en les divisant par le carré, le cube, etc., de $(y - y_1)$, ou de $\psi(y)$, ou de $\psi_1(y)$; ensuite le polynôme $R_{n-p'+1}$, ou plutôt le polynôme obtenu à sa place, se prêtera, avec le polynôme précédent et les suivants, à des considérations et procédés analogues, et ainsi de suite.

Si, avant d'atteindre le polynôme R_n , on tombe sur un polynôme R_{p+1} qui soit nul identiquement, sans que le polynôme précédent R_p

soit d'un degré inférieur à celui que donne son rang, au degré $n - p$, les polynômes suivants sont tous nuls également, quelque valeur qu'on attribue à y . Alors le polynôme R_p est, comme fonction de x , le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Mais, si l'on appelle D ce plus grand commun diviseur sous une forme où ses coefficients n'admettent aucun diviseur commun en y , et que $F_1(x)$, $f_1(x)$ soient les quotients de $F(x)$ et de $f(x)$ par D , il est à observer que D divisera, outre $F(x)$ et $f(x)$, tous les polynômes qui suivent jusqu'à R_p inclusivement. Or, si l'on attribue à y une valeur telle qu'il y ait une ou plusieurs valeurs correspondantes de x satisfaisant avec elle à $F_1(x) = 0$, $f_1(x) = 0$, cette valeur de y , en général, n'annulera D qu'avec d'autres valeurs de x ; par conséquent toute solution commune à $F_1(x) = 0$, $f_1(x) = 0$ annulera les quotients de R_1 , R_2 , ..., R_p par D . Donc, le quotient de R_p par D , quotient indépendant de x , Y , aura pour racines les valeurs de y qui figurent dans les solutions du système $F_1(x) = 0$, $f_1(x) = 0$. D'après quoi, les coefficients de R_p ayant Y pour leur plus grand commun diviseur, de sorte que D soit le quotient de R_p par Y , l'équation $Y = 0$ comportera toutes les valeurs de y qui font partie des solutions de ce système $F_1(x) = 0$, $f_1(x) = 0$.

Réciproquement, toute valeur de y qui annulera Y donnera, par le premier des polynômes précédents, après leur division par D , qui ne s'annulera pas, quand on y substituera cette valeur de y , une ou plusieurs valeurs de x qui, avec elle, constitueront des solutions communes aux équations $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, en général étrangères à D , par conséquent communes aux équations $F_1(x) = 0$, $f_1(x) = 0$.

Donc l'équation $Y = 0$ sera l'équation finale due à l'élimination de x entre $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$. Et, si l'on substitue dans les polynômes qui précèdent R_p , après les avoir divisés par D , une racine de l'équation $D = 0$, les valeurs de x correspondantes relatives à $F_1(x) = 0$ et $f_1(x) = 0$ seront données par le premier des quotients, pris en remontant, qui ne s'annulera pas.

D'ailleurs, ce qui a été dit plus haut à l'égard de R_n et des polynômes qui le précèdent est ici applicable à Y et aux quotients obtenus. Notamment les racines de Y auxquelles répondent plusieurs valeurs de x , s'il y en a, pourront se découvrir en procédant au rebours de

proche en proche; et il y aura lieu, s'il s'en trouve, de faire des simplifications correspondantes dans la suite des quotients.

Lorsqu'une valeur de y égale à y_1 annule le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sans annuler les suivants à la fois, le facteur $y - y_1$ appartient à tous les polynômes R ; ou plutôt, si $\psi(y)$ est un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ et qu'il n'ait pas de diviseur commun avec les deux suivants, ce facteur divise tous les polynômes R . Un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ est au carré dans les polynômes R à partir de R_2 . En général, quand les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, la puissance h de ce diviseur appartient à R_k, R_{k+1}, \dots , pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et de moindres puissances divisent les R précédents. Cela est établi au n° 33.

Il conviendra de supprimer les diviseurs de ce genre, puisque les polynômes R se simplifient par la suppression. Pour une valeur de y annulant un pareil diviseur, les polynômes $F(x), f(x)$ perdant chacun un ou plusieurs premiers termes, il y aura bien des valeurs de x correspondantes infinies. C'est un genre de solutions dont nous ne nous sommes pas occupés. Si les équations proposées comportent une ou plusieurs solutions composées d'une pareille valeur de y et de valeurs finies de x , ces solutions se présenteront d'elles-mêmes, après la simplification régulière dont il s'agit, comme on le verra plus loin par un exemple.

Ces considérations nous permettent de formuler la règle suivante pour la résolution de deux équations $\Phi(x, y) = 0, \varphi(x, y) = 0$.

Les premiers membres des deux équations ayant été débarrassés, s'il y a lieu, de tout facteur fonction de y seul ou de x seul, on les ordonnera soit par rapport à x , soit par rapport à y . Supposons-les ordonnés par rapport à x .

On calculera les polynômes R_1, R_2, \dots , jusqu'à un polynôme R_n indépendant de x , ou bien jusqu'à un polynôme R_{p+1} qui soit identiquement nul, alors que le précédent se trouve du degré $n - p$.

Si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ne sont pas premiers entre eux, à les considérer comme fonction de y , leur plus grand commun diviseur divisera tous les polynômes obtenus. Un divi-

seur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ sera au carré dans R_2 et les polynômes suivants. Un diviseur commun aux h premiers coefficients de $F(x)$ et aux h premiers de $f(x)$ sera à la puissance h dans R_h et les polynômes suivants, pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et à de moindres puissances dans les R précédents. On supprimera ces diviseurs aux puissances dont il s'agit ainsi, sauf à tenir compte, suivant les circonstances, des valeurs de x infinies qui, avec les valeurs de y en provenant, constitueront des solutions communes aux équations proposées.

Si l'on va jusqu'à R_n , lorsque tous les coefficients d'une fonction précédente R_{n-p+1} s'annuleront pour une valeur y_1 de y sans que le premier coefficient de R_{n-p} s'annule, il suffira de substituer cette valeur de y dans R_{n-p} pour avoir, par $R_{n-p} = 0$, p valeurs de x correspondantes. Le facteur $y - y_1$ se reproduira alors au delà à des puissances de plus en plus élevées, et il conviendra de le supprimer à ces puissances. S'il arrive que plusieurs facteurs tels que $y - y_1$ répondent à un même nombre de valeurs de x , il n'y aura pas lieu en général de les séparer, cela s'appliquera à leur produit $\psi(y)$.

On cherchera donc si les polynômes R à partir de R_1 ont ainsi des diviseurs; à mesure qu'on en trouvera, on fera les simplifications dont on vient de parler, en déterminant les solutions correspondantes, au moins en établissant les systèmes correspondants d'équations.

On aboutira par là à avoir, au lieu de R_n , soit une constante, soit un polynôme. Dans le dernier cas, chaque racine du polynôme donnera, en général, par le polynôme qui remplacera R_{n-1} , une valeur de x correspondante, accidentellement si R_{n-1} fait défaut, plusieurs valeurs de x par le premier polynôme précédent qui ne manquera pas.

Si, au lieu d'aller jusqu'à R_n , on est arrêté à un polynôme R_p , on cherchera le plus grand commun diviseur Y de ses coefficients, et l'on divisera par Y le polynôme R_p . Le quotient D sera, avec des coefficients premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de $\Phi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. On divisera par D ces deux polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ainsi que les polynômes R_1, R_2, \dots . Les quotients $\Phi_1(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, puis r_1, r_2, \dots, r_{p-1} et Y seront dans les mêmes conditions que les polynômes $\Phi, \varphi, R_1, R_2, \dots$ au cas précédent. On les traitera de la même manière.

II.

L'évaluation du degré maximum de y dans chacun des coefficients des polynômes R_1, R_2, \dots n'est pas sans intérêt.

Dans R_1 , le coefficient de x^{m-1} est un déterminant dont les termes effectifs sont des produits d'éléments pris dans ses différentes lignes et colonnes. Distinguons les lignes où figurent des coefficients de $f(x)$ et celles où se trouvent des coefficients de $F(x)$, et concevons un terme dans le développement du déterminant.

Ce terme contiendra un facteur provenant de la ligne où a est le premier coefficient à gauche : soit α_1 , son rang dans cette ligne; il contiendra un facteur appartenant à la ligne où a est au second rang : soit α_2 , son rang dans cette ligne, et ainsi de suite. Soit de même β_1 , le rang de l'élément qui appartient à la ligne des coefficients de $F(x)$ où A est au premier rang à gauche; soit β_2 , le rang d'un élément appartenant à une ligne où A est au second rang, etc.

Si m et n sont les degrés de $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ aussi bien par rapport à x et y que par rapport à x en particulier, le degré de a_i ou Λ_i sera i au maximum. Alors le degré d'un élément de rang α_1 , sera $\alpha_1 - 1$, de rang α_2 sera $\alpha_2 - 2, \dots$; celui d'un élément de rang β_i sera $\beta_i - i$; ou bien les degrés seront moindres.

Le degré maximum de chaque terme dans le premier coefficient de R_1 sera, en conséquence,

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \dots + [\alpha_{m-n+1} - (m - n + 1)] + \beta_1 - 1;$$

mais, en observant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-n+1}$, et β_1 , comprennent tous les nombres depuis 1 jusqu'à $m - n + 2$ inclusivement, on voit que ce degré est

$$\frac{(m - n + 3)(m - n + 2)}{2} - \frac{(m - n + 2)(m - n + 1)}{2} - 1 = m - n + 1.$$

Tel est ainsi, au maximum, le degré par rapport à y du premier terme de R_1 . Pour le second, le degré augmente, en général, d'une unité par l'élément qui provient de la dernière colonne. Le degré du second terme sera donc, en général, $m - n + 2$: celui du troisième

sera $m - n + 3$, et ainsi de suite; celui du dernier s'élèvera jusqu'à m en général.

De même, en employant pour R_2 des notations analogues, on a, pour évaluation maximum du degré de son premier terme par rapport à y ,

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \dots + [\alpha_{m-n+1} - (m - n + 2)] + (\beta_1 - 1) + (\beta_2 - 2) \\ = \frac{(m - n + 5)(m - n + 4)}{2} - \frac{(m - n + 3)(m - n + 2)}{2} - 3 = 2(m - n) + 2^2.$$

D'un terme au suivant, le degré augmentera aussi dans R_2 d'une unité, au moins en général, de sorte que le degré du dernier terme sera au maximum

$$2(m - n) + 2^2 + n - 2 = 2m - n + 2.$$

Dans R_3 , le degré du premier terme pourra monter à

$$3(m - n) + 3^2,$$

et celui du dernier à

$$3m - 2n + 6.$$

En général, pour R_p , le degré du premier terme est

$$p(m - n) + p^2,$$

celui du dernier

$$pm - (p - 1)n + p(p - 1) = pm - (p - 1)(n - p);$$

de sorte que, si $m - n = 1$, c'est, au premier terme,

$$p(p + 1),$$

et, au dernier,

$$m + (p - 1)(p + 1).$$

Au cas de $p = n$, le dernier résultat, indépendant de x , est ainsi du degré mn au plus.

Lorsque $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ sont de degrés $M = m + q$, $N = n + q'$, leurs degrés en x étant m et n , les coefficients A_i seront au plus de degré $q + i$, et les coefficients a_i de degré $q' + i$. Il y aura donc à augmenter de q' chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, et de q chacun des nombres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Les résultats qui s'ensuivent sont faciles à

obtenir; ils n'ont une forme remarquable que pour R_n , dont le degré maximum est alors

$$mn + mq' + nq = (M - q)(N - q') + (M - q)q' + (N - q')q = MN - qq'.$$

Ce mode d'évaluation du degré se trouve, pour ce qui regarde le résultant de Sylvester ou de Cauchy, c'est-à-dire R_n , dans le *Traité d'Algèbre* de M. Briot, qui l'y attribue à M. Bouquet.

Avant de présenter quelques applications, je terminerai cet exposé par un rapprochement entre la méthode de résolution qui vient d'être tracée et celle qui est due à M. Labatie. J'emprunte les notations, à des parenthèses près, au *Traité d'Algèbre* de MM. Mayer et Choquet.

III.

Les deux polynômes qu'on ordonne par rapport à x étant A et B, si c, c_1, c_2, \dots sont les multiplicateurs consécutivement employés pour avoir des restes entiers qu'on désigne par $(R)r, (R_1)r_1, (R_2)r_2, \dots$; r, r_1, r_2, \dots y étant les diviseurs fonctions de y , les relations qu'impliquent les divisions successives sont

$$\begin{aligned} cA &= Bq + (R)r, \\ c_1B &= (R)q_1 + (R_1)r_1, \\ c_2(R) &= (R_1)q_2 + (R_2)r_2, \\ c_3(R_1) &= (R_2)q_3 + (R_3)r_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si d est le plus grand commun diviseur de c et de r , d_1 celui de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1 , d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2 , etc., les systèmes par lesquels se remplace le système proposé sont, dans le procédé de M. Labatie,

$$\left[\frac{r}{d} = 0, B = 0 \right], \left[\frac{r_1}{d_1} = 0, (R) = 0 \right], \left[\frac{r_2}{d_2} = 0, (R_1) = 0 \right], \dots$$

Cela rappelé, supposons d'abord que les polynômes désignés dans notre travail par R_1, R_2, R_3, \dots n'aient pas de diviseur en y . Les rela-

tions qui les concernent sont

$$\begin{aligned} \alpha^{m-n+1} F(x) &= f(x) Q + R_1 (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}, \\ \alpha_1^2 f(x) &= R_1 Q_1 - R_2 \alpha^{m-n+1} (-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n-1}{2}}, \\ \alpha_1^2 R_1 &= R_2 Q_1 - \alpha_1^2 R_3, \\ \alpha_1^2 R_2 &= R_3 Q_1 - \alpha_1^2 R_4, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or, si les quantités c, r se multiplient ou se divisent par un même facteur ou diviseur, le quotient $\frac{r}{d}$ ne change pas, ni le quotient $\frac{c}{d}$. Si l'on multiplie ou si l'on divise c_1 et r_1 , il en est de même de $\frac{cc_1}{dd_1}$ et de $\frac{r_1}{d_1}$, etc. On peut donc adopter les relations précédentes pour l'application de la méthode de M. Labatie.

Le premier reste ne présentant pas de facteur en y , on a $r = 1$, $d = 1$; donc le premier système n'existe pas.

Pour le second reste, on a $r_1 = \pm a^{m-n+1}$; d'ailleurs $\frac{c}{d} = a^{m-n+1}$, d'où $\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1} \alpha_1^2$, par suite $d_1 = a^{m-n+1}$, $\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2$ et $\frac{r_1}{d_1} = \pm 1$.

Le second système n'existe pas davantage, et ainsi de suite. Dans le cas supposé, il n'y a donc aucun système auxiliaire; aussi notre méthode n'en donne-t-elle aucun.

Supposons, en second lieu, que, R_1 n'ayant pas de diviseur en y , on trouve $R_2 = R'_2 r'_2$, et que r'_2 soit premier avec α_1 .

On a alors

$$(R_1) r_1 = \pm a^{m-n+1} R'_2 r'_2,$$

de sorte qu'il vient

$$(R_1) = R'_2 \quad \text{et} \quad r_1 = \pm a^{m-n+1} r'_2.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1} \alpha_1^2, \quad \text{d'où} \quad d_1 = a^{m-n+1},$$

puisque α_1^2 est premier avec r'_2 .

Donc on a

$$\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{r_1}{d_1} = \pm r'_2,$$

c'est-à-dire que le système

$$\left[\frac{r_1}{d_1} = 0, \quad (R) = 0 \right]$$

n'est autre que

$$r'_2 = 0, \quad R_1 = 0.$$

Sans pousser plus loin cette comparaison, on voit assez comment les restes consécutifs, alors même qu'il n'y correspond aucun système auxiliaire, sont, par l'effet seul des multiplicateurs qui interviennent dans les divisions successives, quelque soin qu'on mette à les prendre le plus simples possible, compliqués de facteurs. Nos polynômes, au contraire, ne présentent pas de facteur sans un pareil système, si le facteur est premier avec le premier coefficient du polynôme précédent.

L'application à quelques exemples nous paraît un complément indispensable. Rien n'est plus propre à faire ressortir les avantages de notre pratique. Si des calculs deviennent encore compliqués, il n'y aura pas lieu de s'en étonner: c'est dans l'essence même de la question.

IV.

Applications.

1° (Mayer et Choquet) :

$$\Phi(x, y) = x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0,$$

$$\varphi(x, y) = x^2 + 2yx + y^2 - y = 0.$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$x^2 + 2yx + y^2 - y,$$

$$2yx^2 + (4y^2 - 1)x + 2y^3 - 2y^2 - 2y,$$

$$y - y^2)x^2 + (2y^3 - 2y^2 - 2y)x + y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y.$$

Il s'ensuit

$$R_1 = -x - 2y,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2y & y^2 - y \\ 2y & 4y^2 - 1 & 2y^2 - 2y^2 - 2y \\ y^2 - y & 2y^2 - 2y^2 - 2y & y^4 - 2y^2 - 2y^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= -(y^4 - 2y^2 - 2y^2 - y) + 2y(2y^2 - 2y^2 - 2y) + (y^2 - y)(-3y^2 - y)$$

$$= -y^2 + y.$$

L'équation finale est ainsi

$$y(y-1) = 0;$$

d'où

$$y = 0 \text{ avec } x + 2y = 0,$$

et

$$y - 1 = 0 \text{ avec } x + 2y = 0;$$

ce qui donne les deux solutions

$$y = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 1, \quad x = -2.$$

2° (*Id.*) :

$$F(x) = x^2 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^2 - 4 = 0,$$

$$f(x) = x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

De là d'abord

$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2,$$

$$2yx^2 + (4y^2 - y + 2)x + 4y^2 - 11y^2 + 4y + 4,$$

$$(2y^2 - 5y + 2)x^2 + (4y^2 - 11y^2 + 4y + 4)x + 4y^2(y-2)(y-3);$$

d'où

$$R_1 = (-y+2)x - y^2 + 4 = (-y+2)(x+y+2),$$

$$R_2 = 4y^2(y-2)(y-3)(-y+2) - (4y^2 - 11y^2 + 4y + 4)$$

$$(-y^2 + 4) + (2y^2 - 5y + 2)(y-2)(-9y+2)$$

$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)(4y^4 - 21y^3 + 32y^2 - 16y + 12),$$

$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)^2(4y^3 - 13y^2 + 5y - 6)$$

$$= (y-2)^2(-y^2 + 5y - 6).$$

On a deux solutions par le système

$$y - 2 = 0, \quad x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

ou

$$y = 2, \quad x^2 + 4x = 0,$$

qui consistent donc en

$$y = 2, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 2, \quad x = -4.$$

On en a deux autres par

$$y^2 - 5y + 6 = 0, \quad x + y + 2 = 0;$$

d'où

$$y = 3, \quad x = -5; \quad \text{et} \quad y = 2, \quad x = -4.$$

3° (*Id.*) :

$$\Phi(x, y) = x^3 - 3yx^2 + 3x^2 + 3y^2x - 6yx - x - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$

$$\varphi(x, y) = x^3 + 3yx^2 - 3x^2 + 3y^2x - 6yx - x + y^3 - y + 3.$$

Comme on en tire immédiatement

$$\frac{1}{2}[\Phi(x, y) - \varphi(x, y)] = -3yx^2 + 3x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$

nous poserons

$$F(x) = x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$

$$f(x) = -3(y-1)x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3.$$

Les fonctions à considérer sont

$$-3(y-1)x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$

$$(y^3 - 3y^2 + 2y)x,$$

$$(-y^3 + 3y^2 + y - 3)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)(-y^3 + 3y^2 + y - 3);$$

d'où

$$R_1 = -3(y-1)(y^3 - 3y^2 + 2y)x = -3(y-1)^2y(y-2)x,$$

$$R_2 = -(3y^2 - 6y - 1)(-y^3 + 3y^2 + y - 3)(y-1)^2y(y-2)x$$

$$- (-y^3 + 3y^2 + y - 3)^2(y^3 - 3y^2 + 2y)$$

$$= 8y^2(y-1)^2(y-2)^2(y+1)(y-3).$$

Le facteur $y - 1$ est au carré dans R_1 ; il appartient, en effet, à $f(x)$ sans appartenir au premier coefficient de $F(x)$.

Il répond à $y = 1$ par $F(x) = 0$ trois valeurs de x qui sont $x = 0$ et $x = \pm 2$.

En supprimant ce facteur et ses puissances dans $f(x)$, R_1 et R_2 , on obtient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3x^2 - y^2 + 2y + 3, \\ r_1 &= -3y(y-2)x, \\ r_2 &= 8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

Par le facteur y et le facteur $y - 2$ de r_1 , on a les systèmes

$$(y = 0, -3x^2 + 3 = 0), \quad (y = 2, -3x^2 + 3 = 0);$$

d'où

$$y = 0, x = 1 \quad \text{et} \quad y = 0, x = -1,$$

puis

$$y = 2, x = 1 \quad \text{et} \quad y = 2, x = -1.$$

Il s'ensuit

$$r'_1 = -x, \quad r'_2 = (y+1)(y-3);$$

d'où les solutions

$$y = -1, x = 0 \quad \text{et} \quad y = 3, x = 0.$$

En écartant d'abord de $f(x)$ le facteur $y - 1$, conformément à la recommandation faite, on eût eu

$$\begin{aligned} & -3x^2 - y^2 + 2y + 3, \\ & (y^2 - 2y)x, \\ & (-y^2 + 2y + 3)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)(-y^2 + 2y + 3), \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} R_1 &= -3y(y-2)x, \\ R_2 &= \begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2 + 2y + 3 \\ 0 & y^2 - 2y & 0 \\ -y^2 + 2y + 3 & 0 & (3y^2 - 6y - 1)(-y^2 + 2y + 3) \end{vmatrix} \\ &= (-y^2 + 2y + 3) \begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2 + 2y + 3 \\ 0 & y^2 - 2y & 0 \\ 1 & 0 & 3y^2 - 6y - 1 \end{vmatrix} \\ &= (-y^2 + 2y + 3)(y^2 - 2y) \begin{vmatrix} -3 & -y^2 + 2y + 3 \\ 1 & 3y^2 - 6y - 1 \end{vmatrix} \\ &= -8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

4° (*Id.*) :

$$\Phi(x, y) = (y - 2)x^2 - 2x + 5y - 2 = 0,$$

$$\varphi(x, y) = (yx^2 - 5x + 4y = 0.$$

Les degrés en x étant les mêmes, les polynômes intermédiaires sont

$$(-3y + 10)x - y^2 - 6y,$$

$$(-y^2 - 6y)x + 17y - 10;$$

d'où

$$R_1 = (-3y + 10)x - y^2 - 6y,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} -3y + 10 & -y^2 - 6y \\ -y^2 - 6y & 17y - 10 \end{vmatrix} = -y^4 - 12y^2 - 87y^2 + 200y - 100.$$

Le système proposé est ainsi changé en

$$y^4 + 12y^2 + 87y^2 - 200y + 100 = 0,$$

$$(3y - 10)x + y^2 + 6y = 0.$$

5° :

$$F(x) = x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0,$$

$$f(x) = x^3 - y^2 = 0.$$

Les polynômes à considérer sont

$$x^3 - y^2,$$

$$-y^2x^2 - y^2x - y^4,$$

$$-y^2x^3 - y^4x - y^4,$$

$$-y^2x^3 - y^4x^2 + y^2x;$$

d'où

$$R_1 = y^2(-x^2 - xy - y^2),$$

$$R_2 = 0x + 0.$$

De là

$$Y = y^2, \quad D = -x^2 - xy - y^2,$$

puis

$$\frac{F(x)}{D} = F_1(x) = -x^2 + xy - y^2,$$

$$\frac{f(x)}{D} = f_1(x) = -x + y,$$

$$r_1 = Y = y^2.$$

On en tire, comme solution double,

$$y = 0, \quad x = 0.$$

6°

$$\begin{aligned} F(y) &= y^4 - 2xy^3 + (2x^2 - 1)y^2 + (-x^3 + x)y - x^2 = 0, \\ f(y) &= -y^3 + (x^2 + x)y^2 - (x^3 + x^2)y + x^4 = 0. \end{aligned}$$

Les polynômes préliminaires sont

$$\begin{aligned} &-y^3 + (x^2 + x)y^2 - (x^3 + x^2)y + x^4, \\ &(x^2 + x)y^3 + (-3x^3 + x^2 - 1)y^2 + (3x^4 + x^3 + x^2)y - 2x^5 - x^4, \\ &(-x^3 - x^2)y^3 + (3x^4 + x^3 + x)y^2 + (-3x^5 - x^4 - x^2)y + 2x^6 + x^4, \\ &x^4y^3 - (2x^5 + x^2)y^2 + (2x^6 + x^3)y - x^7 - x^4. \end{aligned}$$

De là

$$R_1 = (-x^4 + x^3 + 1)(y^2 - xy + x^2), \quad R_2 = 0y + 0,$$

par suite

$$D = y^2 - xy + x^2 \quad \text{et} \quad X = -x^4 + x^3 + 1,$$

puis

$$\begin{aligned} F_1(y) &= y^2 - xy - 1, \\ f_1(y) &= -y + x^2, \\ r_1 &= -x^4 + x^3 + 1; \end{aligned}$$

d'où le système

$$x^4 - x^3 - 1 = 0, \quad y = x^2.$$

7°

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 - 3yx^2 + (y^2 + 2y)x - y, \\ f(x) &= -yx^2 + 2yx + y^2 - 3y + 1. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned} &-yx^2 + 2yx + y^2 - 3y + 1, \\ &2yx^2 + (y^3 - 3y^2 - 3y + 1)x - 3y^3 + 8y^2 - 3y, \\ &(y^2 - 3y + 1)x^2 - (3y^3 - 8y^2 + 3y)x + y^4 - 3y^2 + 2y, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} R_1 &= (-y^4 + 3y^3 - y^2 - y)x + 3y^4 - 10y^3 + 9y^2 - 2y \\ &\quad - y(y-1)[(-y^2 + 2y + 1)x + 3y^2 - 7y + 2], \\ R_2 &= (y-1)^2(-y^6 + 10y^5 - 31y^4 + 41y^3 - 25y^2 + 7y - 1) \\ &= (y-1)^4(-y^4 + 8y^3 - 14y^2 + 5y - 1). \end{aligned}$$

Le facteur y de R_1 appartenant au premier coefficient de $f(x)$, il n'y

répond rien. Mais il en est autrement du facteur $y - 1$, auquel correspond le système

$$\left. \begin{array}{l} y = 1, \\ -x^2 + 2x - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} y = 1, \\ (x-1)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Puis, si l'on supprime $(y - 1)^2$ dans R_2 , il vient

$$(y-1)^2(-y^4 + 8y^3 - 14y^2 + 5y - 1) = 0,$$

avec

$$-y^2 + 2y + 1)x + 3y^2 - 7y + 2 = 0.$$

De là encore, comme solution double,

$$\left. \begin{array}{l} y = 1, \\ 2x - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} y = 1, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Ensuite, on a

$$y^4 - 8y^3 + 14y^2 - 5y + 1 = 0,$$

$$(y^2 - 2y - 1)x = 3y^2 - 7y + 2.$$

La particularité qui se présente là pour $y = 1$ est à remarquer.

Si l'on ordonne les mêmes polynômes par rapport à y , on a

$$F(y) = xy^2 + (-3x^2 + 2x - 1)y + x^3,$$

$$f(y) = y^2 + (-x^2 + 2x - 3)y + 1;$$

d'où

$$y(x^3 - 5x^2 + 5x - 1) + x^3 - x,$$

$$y(x - x^3 + x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 3x^2 + 2x - 1),$$

ce qui donne

$$R_1 = y(x^3 - 5x^2 + 5x - 1) + x^3 - x = (x-1)[y(x^2 - 4x + 1) + x^2 + x]$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} x^3 - 5x^2 + 5x - 1 & x^3 - x \\ x - x^3 & x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 3x^2 + 2x - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 8x^2 + 8x^2 - 5x + 1)$$

$$= (x-1)^2(x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1).$$

Par le facteur $x - 1$ de R_1 , on a le système

$$x = 1, \quad (y-1)^2 = 0.$$

Suppression faite de $x - 1$ dans R_1 et de $(x - 1)^2$ dans R_2 , il vient

$$\begin{aligned} r_1 &= y(x^2 - 4x + 1) + x^2 + x, \\ r_2 &= (x - 1)^2(x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1); \end{aligned}$$

d'où, d'une part,

$$(x - 1)^2 = 0, \quad -2y + 2 = 0,$$

ou

$$(x - 1)^2 = 0, \quad y = 1;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1 &= 0, \\ y(x^2 - 4x + 1) + x^2 + x &= 0. \end{aligned}$$

Comme l'équation est réciproque, il est aisé de la résoudre et d'obtenir les valeurs de y qui accompagnent ses racines.

8°

$$\begin{aligned} F(x) &= (y^2 - 1)x^4 - 3y^2x^3 + (y - 1)x^2 - y^3 = 0, \\ (y - 1)x^2 + 2yx^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned} &(y - 1)x^2 + 2yx^2 - y^2, \\ &(2y^3 - 2y)x^3 + (-6y^3 - y^2 + 2y - 1)x^2 + (-y^4 + y^2)x + 4y^4 - y^2, \\ &(-y^4 + y^2)x^2 + (4y^4 - y^2)x + 2y^4 - y^3 + y^2, \\ &(-y^4 + y^2)x^3 + (4y^4 - y^2)x^2 + (2y^4 - y^3 + y^2)x, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} R_1 &= (y - 1)[-10y^3 - 5y^2 + 2y - 1]x^2 - (y^2 - 1)y^2x + (6y + 1)y^2, \\ R_2 &= y^2(y - 1)[y(-y^3 - 40y^4 - 8y^3 + 13y^2 - 7y + 1)x \\ &\quad + 6y^4 - 19y^3 - 6y^4 - 2y^2 - 9y^2 + 3y - 1], \\ R_3 &= y^4(y - 1)(y^3 - 127y^4 + 84y^3 - 4y^4 + 6y^3 + 33y^4 - 13y^2 + 14y^2 - 4y + 1). \end{aligned}$$

Le facteur $y - 1$ est commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ sans appartenir aux suivants. On le voit reproduit dans R_1 , R_2 et R_3 .

En laissant de côté ce facteur et la valeur de x infinie qui y correspond, on voit dans R_2 le facteur y^2 qui est premier avec le premier coefficient de R_1 . Il y correspond le système

$$y^2 = 0, \quad x^2 = 0,$$

d'où, comme solution quadruple,

$$y = 0, \quad x = 0.$$

Suppression faite de y^3 et de y^4 dans R_3 , on a en outre le système

$$\begin{aligned} y^3 - 127y^2 + 84y - 4y^6 + 6y^5 + 33y^4 - 13y^3 + 14y^2 - 4y + 1 &= 0, \\ y^3 - y^2 - 40y^4 - 8y^3 + 13y^2 - 7y + 1 &= 0, \\ + 6y^4 - 19y^3 - 6y^4 - 2y^3 - 9y^2 + 3y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Le même exemple, si l'on ordonne les polynômes par rapport à y , donne

$$F(y) = -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^2y - x^4 - x^2,$$

$$f(y) = -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;$$

d'où

$$\begin{aligned} -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3, \\ -x^2(x+2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4 - x^2, \\ x^3y^2 - (x^7 - 3x^6 + x^4 + x^2)y + x^7 + 2x^6 + 2x^4. \end{aligned}$$

Par là

$$R_1 = x^2[-x^3 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1]y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1,$$

$$R_2 = x^4 - 7x^5 + 24x^6 + 30x^7 + 3x^8 + 16x^9 - 6x^{10} + 1).$$

On a ainsi par R_1 le même système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0;$$

puis on a par ailleurs

$$\begin{aligned} -7x^5 + 24x^6 + 30x^7 + 3x^8 + 16x^9 - 6x^{10} + 1 &= 0, \\ (-x^3 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

9°

$$F(y) = -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^2y - x^4,$$

$$f(y) = -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;$$

d'où

$$\begin{aligned} -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3, \\ -(x^3 + 2x^2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4, \\ x^3y^2 + (-x^7 + 3x^6 - x^4)y + x^7 + 2x^6 - x^4, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} R_1 &= x^2[-x^3 + 2x^2 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1]y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1), \\ R_2 &= x^2[-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1]. \end{aligned}$$

Par le facteur x^2 de R_1 , on a le système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0.$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} r_1 &= x^2[-x^3 + 2x^2 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1]y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1), \\ r_2 &= x^2[-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1]; \end{aligned}$$

d'où encore le système

$$x^3 = 0, \quad y = 0,$$

puis le système

$$\begin{aligned} &-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1, \\ &(-x^3 + 2x^2 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1) = 0. \end{aligned}$$

En traitant le même exemple pour l'élimination de x , on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= (y^2 - 1)x^3 - 3y^2x^2 + yx^2 - y^3, \\ f(x) &= (y - 1)x^3 + 2yx^2 - y^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &(y - 1)x^3 + 2yx^2 - y^2, \\ &2y(y^2 - 1)x^3 + [-6y^3 - y^2 + y]x^2 - y^2(y^2 - 1)x + 4y^4 - y^3, \\ &-y^2(y^2 - 1)x^2 + y^3(4y - 1)x + y^3(2y - 1), \\ &-y^2(y^2 - 1)x^3 + y^3(4y - 1)x^2 + y^3(2y - 1)x, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} R_1 &= y(y - 1)[(-10y^2 - 5y + 1)x^2 - y(y^2 - 1)x + y^2(6y + 1)], \\ R_2 &= y^4(y - 1)[(-y^4 - 40y^3 - 8y^2 + 9y - 2)x + 6y^4 - 19y^3 - 6y^2 + 6y - 1], \\ R_3 &= y^7(y - 1)(y^6 - 111y^5 + 72y^4 - y^3 - 13y^2 + 10y - 1). \end{aligned}$$

Le facteur $y - 1$ commun aux premiers coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se voit là dans R_1 , R_2 et R_3 . Ce facteur écarté, on a par le facteur y de R_1 , le système

$$y = 0, \quad x^2 = 0,$$

puis on a

$$\begin{aligned} r_1 &= (-10y^2 - 5y + 1)x^2 - y(y^2 - 1)x + y^2(6y + 1), \\ r_2 &= y^2[-y^4 - 40y^3 - 8y^2 + 9y - 2]x + 6y^4 - 19y^3 - 6y^2 + 6y - 1, \\ r_3 &= y^4(y^4 - 111y^3 + 72y^2 - y^3 - 13y^2 + 10y - 1); \end{aligned}$$

Par le facteur y^2 de r_2 , il vient encore

$$y^2 = 0, \quad x^2 = 0,$$

après quoi il reste

$$\begin{aligned} y^4 - 111y^3 + 72y^2 - y^2 - 13y^2 + 10y - 1 &= 0, \\ -(y^4 - 40y^3 - 8y^2 + 9y - 2)x + 6y^4 - 19y^3 - 6y^2 + 6y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

10^o

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 - x^4 + (y - 2)x^2 + 3x + 2, \\ f(x) &= x^4 - yx^2 - 2x + y - 1; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x^4 - yx^2 + 2x + y - 1, \\ -yx^2 + (y - 2)x - (y + 1), \\ -yx^4 + (y - 2)x^2 - (y + 1)x, \\ -2x^4 + (y - 2)x^2 - (y + 1)x^2 + (y + 4)x + y^2 - y + 2, \\ (y - 1)x^4 - (y + 1)x^2 + (y^2 - y + 2)x + 3y + 1, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} R_1 &= -yx^2 + (y - 2)x - (y + 1), \\ R_2 &= (y^3 - y^2 + 2y)x^2 + (3y^2 + y)x - y^3 + y^2, \\ R_3 &= (2y^4 + 3y^3 + 18y^2 - 11y + 8)x + y^3 - 4y^4 + 5y^3 + 2y^2 + 4, \\ R_4 &= -y^7 + 7y^6 - 7y^5 + 20y^4 + 122y^3 - 52y^2 + 38y + 1. \end{aligned}$$

Le facteur y de R_2 ne se reproduit pas au delà, appartenant au premier coefficient de R_1 . Il n'y répond aucune solution. Le système résultant est ainsi

$$\begin{aligned} y^7 - 7y^6 + 7y^5 - 20y^4 - 122y^3 + 52y^2 - 3y - 1 &= 0, \\ (2y^4 + 3y^3 + 18y^2 - 11y + 8)x + y^3 - 4y^4 + 5y^3 + 2y^2 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

En faisant l'élimination de y , on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} R_1 &= x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0, \\ (-x^2 + 1)y + x^4 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

MÉMOIRE

SUR LES

RÉSISTANCES QU'ÉPROUVE UNE SURFACE MOBILE

DE LA PART D'UN MILIEU FLUIDE DANS LEQUEL ELLE SE MEUT;

PAR M. LEON GEOFFROY,

INGÉNIEUR, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE CENTRALE.

Nous admettons comme base de nos calculs la loi de Newton : la résistance normale sur l'élément superficiel $d\omega$, proportionnelle au carré de la vitesse V de l'élément et au carré du cosinus de l'angle φ , que fait la normale à l'élément superficiel, avec la direction de la vitesse V (le milieu fluide étant supposé en repos).

L'effort normal à l'élément $d\omega$, sera donc de la forme

$$(1) \quad F = K V^2 \cos^2 \varphi d\omega.$$

Le mouvement instantané le plus général de la surface mobile est, d'après le théorème de Poncelet, un mouvement de rotation élémentaire, autour d'un certain axe, accompagné d'une translation élémentaire, parallèlement au même axe.

Nous prendrons, pendant le temps infiniment petit dt , l'axe instantané de rotation et de glissement pour axe des z , les coordonnées étant rectangulaires.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface à l'instant considéré, les angles de la normale avec les axes sont donnés par les relations

$$\cos(N, x) = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos(N, y) = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

p et q désignant, comme à l'ordinaire, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$.

Les angles de la vitesse V avec les axes sont déterminés par les formules suivantes, dans lesquelles v est la vitesse élémentaire de translation, ω la vitesse élémentaire de rotation

$$\cos(V, x) = \frac{\omega y}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}},$$

$$\cos(V, y) = \frac{-\omega x}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}},$$

$$\cos(V, z) = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}}.$$

La vitesse v est dirigée de O à z , et la rotation a lieu de Oy vers Ox . L'angle φ sera déterminé par la relation

$$\cos^2 \varphi = \frac{(v + \omega qx - \omega py)^2}{[v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)](\rho^2 + q^2 + 1)}.$$

La valeur (1) de la force F deviendra

$$(2) \quad F = K \frac{(v + \omega qx - \omega py)^2}{\rho^2 + q^2 + 1} d\omega.$$

Considérons d'abord le cas particulier où l'on aurait, en chacun des points de la surface mobile,

$$(3) \quad v + \omega qx - \omega py = 0.$$

La surface, définie par cette équation aux dérivées partielles, présente cette propriété remarquable, qu'en chacun de ses points la résistance normale est nulle; l'action élémentaire du milieu sur la surface se réduit donc aux simples frottements.

Si nous posons

$$\frac{v}{\omega} = n,$$

l'équation (3) pourra se mettre sous la forme

$$py - qx = n.$$

L'intégration s'obtient immédiatement par le procédé ordinaire :

écrivons

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{n}.$$

On en déduit

$$y^2 + x^2 = K^2,$$

$$dz = \frac{ndx}{\sqrt{K^2 - x^2}}, \quad z = n \operatorname{arc} \sin \frac{x}{K} + C,$$

$$z = n \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C.$$

L'équation générale des surfaces considérées sera

$$C = \varphi(K^2) \quad \text{ou} \quad z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \text{const.},$$

ou plus simplement

$$(4) \quad z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C.$$

Le mode de génération de ces surfaces est très-remarquable; nous n'examinerons que le cas où la fonction φ est algébrique. Posons

$$\varphi(x^2 + y^2) = A(x^2 + y^2)^m + B(x^2 + y^2)^n + \dots + C.$$

On peut, en posant $y = x \operatorname{tang} \mu$, écrire

$$z = A \frac{x^{2m}}{\cos^{2m} \mu} + B \frac{x^{2p}}{\cos^{2p} \mu} + \dots + n\lambda + C,$$

λ étant le complément de l'angle μ .

Cette dernière équation représente la projection, sur le plan zOx , de la section de la surface, par le plan $y = x \operatorname{tang} \mu$.

Pour avoir l'équation de la courbe dans le plan zOx , lui-même, nous remplacerons x par $x_1 \cos \mu$; on aura ainsi

$$(5) \quad z = Ax_1^{2m} + Bx_1^{2p} + \dots + n\lambda + C;$$

la forme de cette courbe est indépendante de λ ; mais le point où cette courbe rencontre Oz varie suivant la direction du plan zOx_1 .

Ainsi donc :

Les surfaces de résistance nulle offrent cette analogie, avec les surfaces

de révolution d'axe Oz, d'être coupées par tous les plans passant par cet axe, suivant des courbes identiques.

Ces surfaces sont engendrées par la combinaison des deux mouvements suivants : une rotation autour de Oz de la courbe (5) et un mouvement de translation de cette courbe parallèlement à Oz.

La vitesse de cette translation dépend du terme indépendant $n\lambda + C$, qui est le z du point où la courbe (5) coupe l'axe Oz; pour $\lambda = 0$, on a $z = C$, et cette valeur augmente proportionnellement à λ ; en d'autres termes, la translation de la courbe génératrice est proportionnelle à la quantité angulaire dont elle tourne dans le même temps.

Le mode de génération consiste, en définitive, dans le mouvement hélicoïdal autour de Oz de la courbe (5); les vitesses de translation et de rotation ont pour rapport $\frac{n\lambda}{\lambda}$, c'est-à-dire précisément le rapport $\frac{v}{\omega} = n$, du mouvement hélicoïdal élémentaire de la surface mobile.

Le résultat précédent peut être obtenu à l'aide des considérations suivantes :

Un point quelconque de la surface mobile décrit autour de Oz une hélice dont le pas est $\frac{2\pi v}{\omega}$ ou $2\pi n$, et la vitesse initiale de ce point est dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à cette hélice; si cette courbe est contenue sur la surface mobile elle-même, le point se mouvra sur la surface mobile, ce qui est évidemment la condition de résistance nulle pour ce point; il faut donc que la surface soit telle qu'il passe, en chacun de ses points, une hélice de pas $\frac{2\pi v}{\omega}$.

Considérons les équations

$$\varphi(x^2 + y^2) = 0,$$

qui représente les cylindres de révolution d'axe Oz et

$$z = n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C,$$

qui représente une surface de vis à filet carré ayant Oz pour directrice rectiligne et xOy pour plan directeur.

Si l'on prend ces deux équations simultanément, elles représenteront

des hélices de pas $2\pi n$. D'après la propriété connue de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, d'être coupée par des cylindres d'axe Oz , suivant des hélices de même pas, l'équation générale des surfaces de résistance nulle sera évidemment

$$\varphi(x^2 + y^2) = z - n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} - C$$

ou

$$z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C,$$

qui est précisément l'équation trouvée directement.

Les cas les plus remarquables sont les suivants :

1° La fonction φ est

$$A\sqrt{x^2 + y^2};$$

l'équation

$$z = A\sqrt{x^2 + y^2} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C$$

représente une surface de vis à filet triangulaire qui, pour $A = 0$, se transforme en une surface de vis à filet carré.

2° La fonction φ est

$$A(x^2 + y^2);$$

l'équation

$$z = A(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C$$

représente la surface engendrée par une parabole d'axe Oz et de paramètre $\frac{1}{2A}$, qui tourne autour de Oz du mouvement hélicoïdal uniforme dont ν et ω sont les éléments.

Si nous supposons maintenant que le mouvement hélicoïdal de la surface mobile soit continu, au lieu d'être instantané, et que la valeur de n reste constante, les surfaces précédentes auront à chaque instant la propriété reconnue. Ainsi :

Les seules surfaces de résistance nulle sont les surfaces d'équation

$$z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C$$

assujetties à se mouvoir d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour

de zO , les éléments v et ω de ce mouvement restant dans le rapport constant n . Dans le cas particulier où la translation serait nulle, on aurait $v = 0$, $n = 0$; l'équation précédente se réduirait à $z = \varphi(x^2 + y^2)$, qui représente toutes les surfaces de révolution d'axe Oz .

Il convient de remarquer que les résultats qui précèdent sont complètement indépendants de la relation actuellement inconnue entre l'action du fluide sur l'élément superficiel et les quantités V et φ ; en d'autres termes, toute autre loi que celle de Newton donne le même résultat relativement aux surfaces de résistance nulle.

Recherche des lignes de résistance nulle sur une surface mobile quelconque.

Cherchons sur la surface mobile, dont l'équation rapportée aux axes instantanés définis précédemment est

$$(6) \quad z = f(x, y),$$

le lieu des points en lesquels la résistance normale est nulle à l'instant dt , que nous considérons. Cela revient à chercher le lieu des points en lesquels on a

$$(7) \quad py - qx = n,$$

p et q sont les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, prise dans l'équation (6). Considérons, par exemple, le parabolôïde elliptique

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

on a ici

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b},$$

l'équation de la projection sur xOy de la courbe de résistance nulle sera

$$xy = \frac{abn}{b-a}.$$

Nous ferons sur ce sujet la remarque suivante : la courbe de résistance nulle est le lieu des points de la surface dont la vitesse est dirigée

dans le plan tangent à cette surface en ces points. Cette courbe reste donc sur la surface pendant le temps dt ; d'autre part, elle fait partie de la position infiniment voisine qu'est venue prendre la surface mobile à la fin du temps dt ; elle est donc la *caractéristique* de la surface enveloppe de la surface mobile considérée comme enveloppée; les équations simultanées (6) et (7) représenteront à chaque instant cette caractéristique. La recherche de l'enveloppe d'une surface mobile indéformable se trouve ainsi rattachée aux considérations qui précèdent.

Nous devons remarquer également que les surfaces de résistance nulle admettent dans leur mouvement hélicoïdal une infinité de caractéristiques, puisque tous leurs points satisfont à l'équation (7). Ce sont les seules surfaces qui puissent être à elles-mêmes leur enveloppe.

Détermination du lieu des points de la surface mobile où la résistance est la même par unité de surface.

Il faut qu'on ait

$$\frac{F}{K d\omega} = C^2$$

en tous les points de la courbe considérée, soit

$$V^2 \cos^2 \varphi = C^2 \quad \text{ou} \quad \frac{(v + \omega g x - \omega p y)^2}{p^2 + q^2 + 1} = C^2,$$

ou enfin

$$(8) \quad (n + q x - p y)^2 = \frac{c^2}{\omega^2} (p^2 + q^2 + 1).$$

Cette équation, considérée isolément, est l'équation aux dérivées partielles des surfaces en tous les points desquelles la résistance normale est constante. On peut employer pour cette intégration la méthode de Cauchy; les équations simultanées qui se présentent dans l'application de cette méthode se prêtent difficilement au calcul.

Si nous combinons l'équation (8) avec l'équation

$$z = f(x, y),$$

nous aurons les équations générales des courbes de résistance égale,

sur la surface particulière

$$z = f(x, y).$$

Appliquons ces formules au cas intéressant de la surface motrice de l'hélice des navires. Cette surface n'est autre chose que la portion de la surface d'une vis à filet carré comprise entre deux cylindres ayant pour axe commun la directrice rectiligne de la surface de la vis et pour rayons r et R .

Soit

$$z = k \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y} + C.$$

l'équation de la surface considérée; on y suppose k différent de n , sans cela on aurait affaire à une surface de résistance nulle.

On a ici

$$py - qx = k \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 + 1 = \frac{k^2}{y^2 + x^2} + 1;$$

l'équation (8) devient

$$\frac{C^2}{\omega^2} \left(\frac{k^2}{y^2 + x^2} + 1 \right) = (k - n)^2;$$

on en déduit

$$C^2 = \frac{\omega^2 (k - n)^2 (y^2 + x^2)}{k^2 + y^2 + x^2}.$$

Cette équation représente un cylindre de révolution d'axe OZ; les courbes, d'égale résistance, sont par conséquent des hélices.

Recherche du point de la surface mobile, en lequel la résistance du fluide et par conséquent la valeur de C^2 est maximum.

C^2 étant une fonction des deux variables indépendantes x et y , il faudra qu'on ait

$$\frac{dC^2}{dx} = 0, \quad \frac{dC^2}{dy} = 0.$$

Si nous posons

$$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dq}{dy} = t, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s,$$

on aura pour déterminer le point cherché les trois équations

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2 + 1)(sx + q - ry) - (n + qx - py)(pr + qs) &= 0, \\ (p^2 + q^2 + 1)(tx - p - sy) - (n + qx - py)(ps + qt) &= 0, \\ z &= f(x, y).\end{aligned}$$

Frottement du milieu sur la surface mobile.

On peut se proposer des problèmes analogues aux précédents, relativement aux résistances provenant du frottement du fluide sur les différents points de la surface.

Nous admettrons que le frottement soit proportionnel, en chaque point, au carré de la vitesse projetée sur le plan tangent à la surface, soit $aV^2 \sin^2 \varphi$.

Points où le frottement est nul. — Il faut

$$V^2 \sin^2 \varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \cos^2 \varphi = 1.$$

En égalant à l'unité la valeur de $\cos^2 \varphi$, calculée précédemment, et en effectuant, il vient

$$(px + qy)^2 + (pn + y)^2 + (qn - x)^2 = 0.$$

Il faut donc qu'on ait en même temps

$$\begin{aligned}(a) \quad & px + qy = 0, \\ (b) \quad & pn + y = 0, \\ (c) \quad & qn - x = 0, \\ (d) \quad & z = f(x, y).\end{aligned}$$

Ces quatre équations se réduisent à trois, ce qui rend le problème déterminé.

Si, en effet, on divise (b) par (c), on en tire

$$\frac{p}{q} = -\frac{y}{x}, \quad \text{d'où} \quad px + qy = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (a).

Le système des équations (b), (c), (a) détermine donc les points de

frottement nul, ou, ce qui est la même chose, les points dont la vitesse est normale à la surface à l'instant considéré.

Lieu des points d'égal frottement (sur la surface mobile). — On a, en ces points,

$$V^2 \sin^2 \varphi = C^2,$$

ou

$$(9) \quad C^2 = \frac{(px + qy)^2 + (pn + y)^2 + (qn - x)^2}{p^2 + q^2 + 1} \omega^2.$$

Cette équation, jointe à $z = f(x, y)$, définit les courbes considérées.

Points où le frottement est maximum. — On considérera dans la formule (9) C^2 comme une fonction de deux variables indépendantes x et y . Les équations simultanées

$$\frac{dC^2}{dx} = 0, \quad \frac{dC^2}{dy} = 0, \quad z = f(x, y)$$

nous fourniront les points cherchés.

Nous pouvons donc, en résumé, couvrir une surface mobile d'un réseau de courbes indiquant en chaque point la résistance normale et le frottement, ce qui pourrait être de quelque utilité dans l'étude de la répartition des résistances aux différents points de la surface mobile.

Étude spéciale de l'hélice motrice des navires.

Nous prendrons pour équation de cette surface motrice

$$z = k \operatorname{arctang} \frac{x}{y} + C.$$

Nous savons que les courbes d'égale résistance sont des hélices, et nous aurons, en conservant les notations précédentes, aux différents points d'une hélice de rayon ρ ,

$$C^2 = \frac{\omega^2 (k - n)^2 \rho^2}{\rho^2 + h^2} = V^2 \cos^2 \varphi.$$

La pression sur l'élément superficiel $d\omega$, pris en un point de cette hélice, sera

$$F = KV^2 \cos^2 \varphi d\varphi,$$

et la projection de cette force sur l'axe OZ sera, en appelant λ l'angle de la normale à l'élément, avec l'axe OZ,

$$KV^2 \cos^2 \varphi d\omega, \cos \lambda;$$

la somme de ces projections sera, pour les différents points de l'hélice,

$$KV^2 \cos^2 \varphi \Sigma d\omega, \cos \lambda = KC^2 \Sigma d\omega, \cos \lambda.$$

La quantité $\Sigma d\omega, \cos \lambda$ représente la projection sur XOY de l'aire comprise entre les deux hélices de rayons ρ et $\rho + d\rho$.

Si nous désignons par H le pas de l'hélice, et par $\frac{L}{H}$ la fraction utilisée de ce pas, on aura

$$\Sigma d\omega, \cos \lambda = 2\pi\rho d\rho \frac{L}{H}.$$

La somme des projections des pressions sur OZ sera, pour toute l'étendue de la surface motrice,

$$P = K \frac{\omega^2 (k - n)^2 2\pi L}{H} \int_r^R \frac{\rho^3 d\rho}{h^2 + \rho^2}.$$

On a

$$H = 2\pi k \quad \text{et} \quad \int_r^R \frac{\rho^3 d\rho}{h^2 + \rho^2} = \frac{R^2 - r^2 - h^2 \log \text{nép.} \frac{R^2 + h^2}{r^2 + h^2}}{2},$$

par suite

$$H = K \frac{\omega^2 \left(\frac{H}{2\pi} - \nu \right)^2 \pi L}{H} \left(R^2 - r^2 - \frac{H^2}{4\pi^2} \log \text{nép.} \frac{1 + \frac{4\pi^2 R^2}{H^2}}{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{H^2}} \right),$$

ou enfin

$$P = K\pi LH \left[\frac{\omega H}{2\pi} - \nu \right]^2 \left(\frac{R^2 - r^2}{H^2} - \frac{1}{4\pi^2} \log \text{nép.} \frac{1 + \frac{4\pi^2 R^2}{H^2}}{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{H^2}} \right)$$

Nous retrouvons ainsi la formule établie par MM. Guède et Jay dans leur étude sur la surface motrice qui nous occupe actuellement.

Méthode générale pour calculer la somme des projections sur un axe des actions du milieu sur la surface mobile $z = f(x, y)$.

Considérons, par exemple, la somme des projections des résistances sur l'axe OZ. Nous avons pour chaque élément $d\omega$

$$F_3 = KV^2 \cos^2 \varphi d\omega \cos \lambda.$$

Si nous considérons les différents points d'une courbe d'égale résistance de la surface, nous aurons en chaque point

$$F_3 = KC^2 d\omega \cos \lambda,$$

et pour tous les points

$$\Sigma F_3 = KC^2 \Sigma d\omega \cos \lambda.$$

Soit $f(x, y) = C^2$ l'équation de la projection sur XOY de la courbe d'égale résistance considérée; soit $f(x, y) = C^2 + dC^2$ la courbe infiniment voisine. La quantité $\Sigma d\omega \cos \lambda$ représente l'aire élémentaire située entre ces deux courbes.

Si je désigne par $A = F(C^2)$ l'aire de la courbe $f(x, y) = C^2$, on aura

$$\Sigma d\omega \cos \lambda = dA = F'(C^2) dC^2,$$

et par suite

$$\Sigma F_3 = KC^2 F'(C^2) dC^2.$$

Si nous appelons C_1^2 et C_2^2 les valeurs de C^2 qui correspondent aux courbes extrêmes de résistance égale, entre lesquelles on veut évaluer la projection P des actions normales sur OZ, on aura

$$P = \int_{C_1^2}^{C_2^2} KC^2 F'(C^2) dC^2.$$



MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET
DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

DEUXIÈME PARTIE.

§ X. — *Extension des résultats précédents aux systèmes orthogonaux à n variables.*

On sait toute l'importance que présente en Mécanique l'emploi du système de coordonnées elliptiques à n variables; je crois donc utile d'étendre les recherches précédentes aux systèmes orthogonaux à n variables. Nous rencontrerons ainsi des problèmes d'Analyse qui méritent d'être étudiés en eux-mêmes, et nous montrerons d'ailleurs que la connaissance d'un système orthogonal à n variables entraîne celle d'un nombre illimité de systèmes orthogonaux ordinaires à trois variables.

Je considère donc n fonctions $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ de n variables x_1, \dots, x_n qui satisfont aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(126) \quad \delta_{\alpha^i} \alpha^j = 0,$$

où nous conservons les notations du § I. Ainsi α_k^i désignera la dérivée de α^i par rapport à x_k . Du reste, pour éviter autant que possible des notations compliquées, toutes les fois que nous aurons à con-

sidérer un certain nombre limité de fonctions α^i , nous les désignerons par les lettres u, v, w, t, α , sans indice. Rappelons aussi que nous avons posé comme définition

$$\begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma v_i w_t u_{it},$$

et il résulte de la formule (11) que ce symbole est nul toutes les fois que v, w, u sont différents.

Le premier point que nous aurons à traiter et le plus important est le suivant :

Éliminer des équations (126), par des dérivations, toutes les fonctions, moins une, que nous désignerons par la lettre u , et rechercher toutes les équations nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire cette fonction pour que le problème ait une solution.

Aux équations (126), qui peuvent s'écrire

$$(127) \quad \delta_r u = 0, \quad \delta_r v = 0, \quad \dots,$$

nous avons à ajouter les suivantes :

$$(128) \quad \begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = 0,$$

qui, jointes aux précédentes, constituent un système de $(n-1)^2$ équations ne contenant que les dérivées premières des fonctions v, w , et homogènes d'ailleurs par rapport aux dérivées de chaque fonction. Elles déterminent donc complètement les rapports de ces dérivées en fonction des seules dérivées premières et secondes de u . Du reste, la résolution de ces équations équivaut à la solution du problème d'Algèbre suivant, qui est bien connu :

Ramener les deux formes quadratiques

$$(129) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2, \\ \Sigma \Sigma u_{ik} y_i y_k \end{cases}$$

à des sommes composées des mêmes carrés, au nombre de $n-1$, sous la condition que les variables y soient liées par la relation

$$(130) \quad u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n = 0.$$

En effet, si l'on propose de résoudre ce dernier problème, on remplacera d'abord les variables y par $n-1$ variables z , qui soient telles

de degré $n - 1$ en λ , qu'il faudra résoudre, si, supposant la fonction u connue, on veut trouver les rapports des dérivées des $n - 1$ autres fonctions.

Pour déterminer les fonctions ν , ω , on aura donc à intégrer des équations aux différentielles totales de la forme

$$(135) \quad A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0.$$

Pour que des équations de cette forme soient exactement intégrables, il faut que certaines conditions soient satisfaites; A_1, \dots, A_n étant des fonctions des dérivées premières et secondes de u , on voit que la fonction u devra satisfaire à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce sont ces équations que nous allons d'abord rechercher.

Mais auparavant nous avons à établir quelques identités qui nous seront indispensables. Désignons, en général, par G_i l'expression

$$G_i = \sqrt{\delta_{\alpha i} \alpha^i} = \sqrt{(\alpha_1^i)^2 + (\alpha_2^i)^2 + \dots + (\alpha_n^i)^2};$$

il est clair que les quotients

$$(136) \quad b_{ik} = \frac{\alpha_k^i}{G_i}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale; car on a, par la définition de G_i ,

$$b_{ii}^2 + \dots + b_{in}^2 = 1,$$

et les équations (126) peuvent s'écrire

$$b_{i1} b_{k1} + \dots + b_{in} b_{kn} = 0.$$

On aura donc aussi

$$(137) \quad \begin{cases} b_{i1}^2 + b_{2i}^2 + \dots + b_{ni}^2 = 1, \\ b_{i1} b_{1k} + b_{2i} b_{2k} + \dots + b_{ni} b_{nk} = 0, \end{cases}$$

en vertu des propriétés connues de ces coefficients,

Cela posé, si nous désignons par α , ν , ω , u , t cinq fonctions quelconques du groupe considéré, on aura par définition

$$\begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ u & \end{pmatrix} = \sum \sum \alpha_i \nu_k u_{ik}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ t & \end{pmatrix} = \sum \sum \alpha_i \nu_k t_{ik},$$

et, en multipliant,

$$\frac{1}{G^2} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ u & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ t & \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \frac{\alpha_i \alpha_j}{G^2} \omega_k \nu_l u_{ik} t_{jl},$$

la somme devant être étendue à toutes les valeurs de i, j, k, l . Si nous remplaçons la fonction α successivement par toutes les fonctions α', \dots, α^n , et que nous fassions la somme des résultats obtenus, alors, en vertu des formules (137), tous les termes du second membre, dans lesquels i et j seront différents, donneront une somme nulle, et pour les autres le coefficient de $\nu_k \omega_l u_{ik} t_{jl}$ deviendra l'unité. On aura donc

$$(138) \quad \sum \frac{1}{G^2} \begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ t & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ u & \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma \omega_k \nu_l t_{il} u_{ik},$$

la somme du premier membre se composant de n termes correspondant aux n fonctions $\alpha' \dots \alpha^n$.

Le second membre peut s'écrire

$$\Sigma_i \delta_n u_i \delta_n t_i.$$

Nous adopterons, pour le désigner, la notation

$$(139) \quad \Sigma \delta_n u_i \delta_n t_i = \begin{pmatrix} \omega & \nu \\ u & t \end{pmatrix}.$$

Supposons d'abord les quatre fonctions t, u, ν, ω différant les unes des autres. Comme on sait que $\begin{pmatrix} u & \nu \\ \omega & \end{pmatrix}$ est nul toutes les fois que les fonctions sont différentes, on verra facilement que tous les termes du premier membre de l'équation (138) sont nuls, car le premier facteur $\begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ t & \end{pmatrix}$ est nul tant que α est différent de ν et de t ; et, si α est ν ou t , le second facteur est nul. On a donc

$$(140) \quad \begin{pmatrix} \omega & \nu \\ u & t \end{pmatrix} = 0,$$

si u, ν, ω, t sont différents.

On pourrait faire beaucoup d'autres hypothèses. En voici une qui nous conduira à une formule que nous aurons à employer.

Supposons que l'on fasse $t = u$, le premier membre de l'équation

(138) se réduira au seul terme pour lequel $\alpha = u$, et l'on aura

$$\begin{pmatrix} u & v \\ u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & w \\ u & u \end{pmatrix} = G_u^2 \begin{pmatrix} w & v \\ u & u \end{pmatrix},$$

ou, en ordonnant par rapport aux dérivées de v, w ,

$$(141) \quad \Sigma \Sigma v_i w_i (G_u^2 \delta_{u_i} u_i - \delta_u u_i \delta_u u_i) = 0.$$

Ces deux identités (140), (141) suffisent au résultat que nous voulons obtenir, et nous allons chercher maintenant les équations du troisième ordre auxquelles satisfait la fonction u .

Remarquons d'abord que l'équation

$$\begin{pmatrix} v & w \\ u & u \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma v_i w_i u_{ii} = 0$$

est de la forme de l'équation (15) du § I; en lui appliquant la formule (16), nous aurons

$$(142) \quad \Sigma \Sigma v_i w_i (\delta_u u_{ii} - 2 \delta_{u_i} u_i) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace les dérivées v, w par toutes leurs valeurs possibles, on aura un premier groupe de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations auxquelles devra satisfaire la fonction u . Ce sont les équations analogues à celle que nous avons formée dans le cas de trois variables.

Je dis d'abord que, si l'on pose $H = \frac{1}{G_u}$, ces équations peuvent aussi être mises sous la forme irrationnelle

$$(143) \quad \Sigma \Sigma v_i w_i \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_i} = 0.$$

On a effet

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_i} = H^3 (G_u^2 \delta_{u_i} u_{ii} + G_u^2 \delta_{u_i} u_i - 3 \delta_u u_i \delta_u u_i),$$

et par suite

$$\Sigma \Sigma v_i w_i \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_i} = H^3 \Sigma \Sigma v_i w_i (\delta_u u_{ii} - 2 \delta_{u_i} u_i) + 3 H^3 \Sigma \Sigma v_i w_i (G_u^2 \delta_{u_i} u_i - \delta_u u_i \delta_u u_i);$$

ce qui, en vertu de l'équation (141), se réduit à

$$(144) \quad \Sigma \Sigma v_i \omega_k (\delta_n u_{ik} - 2 \delta_{n_i} u_k) = \frac{1}{H^2} \Sigma \Sigma v_i \omega_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}$$

et justifie le résultat que nous avons annoncé.

Mais les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations que nous avons ainsi formées ne sont pas les seules auxquelles doit satisfaire la fonction u . Appliquons l'opération δ_t , t désignant une des fonctions du système, différente de u, v, ω , au symbole

$$\begin{pmatrix} v & \omega \\ u \end{pmatrix}.$$

Cette opération, effectuée sur les lettres v, ω , donne les termes

$$\Sigma \delta_t v_i \delta_n u_i + \Sigma \delta_t \omega_i \delta_n u_i;$$

enfin, appliquée à la lettre u , elle donne

$$\Sigma \Sigma \Sigma t_i v_k \omega_l u_{ikl},$$

somme qui est symétrique par rapport à t, v, ω . On a donc, en se rappelant la notation (139),

$$\delta_t \begin{pmatrix} v & \omega \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \omega \\ v & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & v \\ \omega & u \end{pmatrix} + \Sigma t_i v_k \omega_l u_{ikl}.$$

Toutes les fois que t, v, ω seront différents, en se rappelant les formules (128), (140), on aura

$$(145) \quad \Sigma \Sigma \Sigma t_i v_k \omega_l u_{ikl} = 0;$$

ce qui constitue un nouveau type d'équations du troisième ordre, auxquelles doit satisfaire la fonction u . Remarquons qu'elle peut être obtenue de trois manières différentes par la différentiation des trois équations

$$\begin{pmatrix} v & \omega \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} t & \omega \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} v & t \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

L'équation (145) est le type de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations nouvelles du troisième ordre, qui ne se présentaient pas dans le cas de

trois variables, et auxquelles doit satisfaire la fonction u . Il y a donc, en général, deux groupes tout à fait différents d'équations pour la fonction u .

Avant de continuer ces recherches, je vais montrer que ces équations, qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes, et que, si elles sont satisfaites, on peut trouver les $n - 1$ autres fonctions complétant le système orthogonal. En effet, ces fonctions sont définies, nous l'avons vu, par des équations de la forme

$$\frac{v_1}{A_1} = \frac{v_2}{A_2} = \dots = \frac{v_n}{A_n},$$

et l'on sait que, pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que toutes celles qu'on en déduit, en les différentiant, soient des conséquences des précédentes et se réduisent à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, qui ne pourront même pas complètement déterminer les dérivées secondes; car, si les équations précédentes sont vérifiées, elles le seront aussi en remplaçant v par $\varphi(v)$, ce qui permet de prendre arbitrairement une des dérivées secondes de v .

Au lieu de résoudre les équations

$$\begin{pmatrix} v & w \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \delta u = 0, \quad \delta_n u = 0,$$

nous allons les différentier par rapport à chaque variable, et voir si les équations que l'on obtient, en éliminant toutes les dérivées secondes, sont satisfaites. Or ces équations sont au nombre de $(n - 1)^2$; en les différentiant, on trouve donc $n(n - 1)^2$ équations. Si l'on retranche de ce nombre celui

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] (n - 1)$$

des équations qui doivent conserver les dérivées secondes, on trouve un nombre total

$$\frac{(n - 1)^2 (n - 2)}{2}$$

d'équations qui ne contiendront plus que les dérivées premières, et qui

devront être satisfaites en vertu des équations qui déterminent ces dérivées. Or nous avons déjà :

1° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations

$$\begin{pmatrix} v \cdot w \\ u \end{pmatrix} = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations

$$\delta_v u = 0, \quad \delta_w u = 0,$$

et en effectuant des combinaisons qui font disparaître les dérivées secondes des fonctions v, w . Ces équations sont satisfaites, puisqu'elles servent à définir les dérivées v_i, w_k ;

2° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations (143), qui devront être satisfaites;

3° Les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations (118), qui doivent chacune

être comptées pour trois, puisqu'on les obtient de trois manières différentes, chacune par la différentiation de trois équations distinctes. On a donc en tout

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$$

équations ne contenant pas les dérivées secondes des fonctions v, w , ce qui est bien le nombre que nous devons trouver. Ainsi nos équations du troisième ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes.

§ XI. — *Application à un exemple particulier.*

Pour donner au moins une application des résultats précédents, cherchons les systèmes orthogonaux à n variables pour lesquels on aura

$$(146) \quad u = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

X_i désignant une fonction de la seule variable x_i .

Si nous appliquons les méthodes de l'article précédent, nous trouverons que les équations qui déterminent toute autre fonction faisant partie du système sont les suivantes :

$$(147) \quad v_i = \frac{\mu X_i'}{\lambda - X_i},$$

où λ est racine de l'équation

$$(148) \quad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i} = 0.$$

Il faudra donc que les équations

$$\sum_i \frac{X_i' dx_i}{\lambda - X_i} = 0,$$

où λ est racine de l'équation (148), soient exactement intégrables. En écrivant directement les conditions d'intégrabilité et remplaçant les dérivées de λ par leurs valeurs tirées de la formule (148) différenciée, on trouve sans difficulté des équations de la forme

$$2X_i X_k X_l \begin{vmatrix} X_i X_i'' - 2X_i'^2 & X_k X_k'' - 2X_k'^2 & X_l X_l'' - 2X_l'^2 \\ X_i' & X_k' & X_l' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où les indices i, k, l sont quelconques. Ces équations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$X' X_i'' - 2X_i'^2 = aX_i' + b,$$

où a et b devront être considérés comme des constantes. C'est le même résultat que pour le cas de trois variables.

Le cas, de beaucoup le plus intéressant et qui a été examiné avec le plus de détails par M. Serret, dans l'hypothèse de trois variables indépendantes, est celui où l'on suppose $a = b = 0$, et où l'on a

$$(149) \quad u = m_1 \log x_1 + \dots + m_n \log x_n.$$

Alors l'équation (148) devient, si pour plus d'élégance on y change λ en $\frac{1}{\lambda}$,

$$(150) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0,$$

et les équations aux différentielles totales qu'il s'agit d'intégrer sont les suivantes :

$$\frac{x_1 dx_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0,$$

où il faut remplacer λ par chacune des racines de l'équation (150).

Cette équation (150) étant impossible à résoudre, il semble que l'intégration doit être empêchée. C'est donc un fait analytique très-curieux que l'on puisse intégrer la différentielle précédente.

Posons, en effet,

$$(151) \quad v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{m_2}\right)^{m_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}\right)^{m_n},$$

on trouvera

$$\frac{dv}{2v} = \frac{x_1 dx_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}},$$

et le coefficient de $d\lambda$ sera nul en vertu de l'équation même qui sert à déterminer λ . Nous obtenons donc le théorème suivant :

Les $n - 1$ familles, complétant avec la fonction u le système orthogonal, s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation (151) et sa dérivée par rapport à λ .

Par exemple, dans le cas de trois variables, si l'on prend la famille

$$u = x^m y^n z^p,$$

les deux autres familles de surfaces qu'on doit lui associer s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation

$$(152) \quad v = \left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)^p$$

et sa dérivée par rapport à λ , c'est-à-dire en cherchant l'enveloppe de ces surfaces.

Traitons, par exemple, le cas de $m = n = 1$, $p = -1$. La première famille de surfaces sera composée des paraboloides

$$xy = uz.$$

Les deux autres seront les enveloppes des surfaces

$$v = \frac{(\lambda + x^2)(\lambda + y^2)}{\lambda - z^2}.$$

En cherchant cette enveloppe, l'équation qui définira λ sera

$$\frac{1}{\lambda + x^2} + \frac{1}{\lambda + y^2} - \frac{1}{\lambda - z^2} = 0,$$

et elle donne

$$\begin{aligned}\lambda &= z^2 \pm \sqrt{(z^2 + y^2)(z^2 + x^2)}, \\ \lambda + x^2 &= \sqrt{z^2 + x^2} (\sqrt{z^2 + x^2} \pm \sqrt{z^2 + y^2}), \\ \lambda + y^2 &= \sqrt{z^2 + y^2} (\sqrt{z^2 + y^2} \pm \sqrt{z^2 + x^2});\end{aligned}$$

d'où résulte pour v l'expression

$$\sqrt{v} = \sqrt{z^2 + x^2} \pm \sqrt{z^2 + y^2}.$$

C'est le résultat connu de M. Serret.

Traisons encore le cas où le premier système est donné par l'équation

$$u = xyz.$$

Les deux autres familles sont les enveloppes des surfaces

$$(153) \quad v = (\lambda + x^2)(\lambda + y^2)(\lambda + z^2).$$

Posons

$$\begin{aligned}x^2 &= \alpha + \beta + \gamma, \\ y^2 &= \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \\ z^2 &= \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma,\end{aligned}$$

ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. On aura

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}, \quad \beta = \frac{x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2}{3}, \quad \gamma = \frac{x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2}{3},$$

et l'équation (153) prendra la forme

$$v = (\lambda + \alpha)^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3(\lambda + \alpha)\beta\gamma.$$

En prenant la dérivée par rapport à λ , on trouve

$$(\lambda + \alpha)^2 = \beta\gamma, \quad \lambda + \alpha = 2\sqrt{\beta\gamma},$$

ce qui donne

$$v = \beta^3 + \gamma^3 \pm 2\beta\gamma\sqrt{\beta\gamma} = \left(\beta^{\frac{3}{2}} \pm \gamma^{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

ou

$$3\sqrt{3}\sqrt{v} = (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}} \pm (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui est conforme à un résultat énoncé sans démonstration par M. Cayley.

Mais on peut faire beaucoup d'autres applications du résultat général que nous avons trouvé.

Rappelons-nous les remarques relatives aux coordonnées pentasphériques. Nous avons vu que les conditions d'orthogonalité dans ce système s'expriment comme dans le système ordinaire, si les équations sont homogènes; x_1, \dots, x_5 désignant les coordonnées d'un point, nous considérerons encore la famille

$$(154) \quad u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_5^{\alpha_5};$$

mais, pour que l'équation précédente soit homogène, nous poserons

$$(155) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 0.$$

Avec cette hypothèse, nous allons obtenir de nouveaux systèmes orthogonaux.

Les deux familles complétant le système seront les enveloppes des surfaces représentées par les équations

$$(156) \quad v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_5^2}{\alpha_5} \right)^{\alpha_5},$$

et il est facile de vérifier : 1° que l'équation qui détermine λ ,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1}} + \dots = 0,$$

se réduit, comme cela doit être, au second degré, en vertu de la relation homogène

$$x_1^2 + \dots + x_5^2 = 0;$$

2° que l'équation (156), après qu'on y a substitué à la place de λ sa valeur, devient homogène par rapport aux cinq quantités x_i .

Le nouveau système orthogonal obtenu est, comme on le voit, très-général, puisqu'il contient, en dehors des exposants, les dix constantes qui figurent dans les équations des cinq sphères orthogonales.

Le système de ce genre qui se rapproche le plus de celui de M. Serret est celui pour lequel l'équation (154) prend la forme simple

$$u = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}.$$

On verra facilement que les surfaces algébriques qui complètent le système ont une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{ix_3} \pm \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{ix_1} = \text{const.}$$

Si, par exemple, on prend pour les cinq fonctions x_i

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}, \quad x_5 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2iR},$$

on aura le système orthogonal défini par les équations

$$\frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)} = u,$$

$$\operatorname{arc} \sin \frac{2R\sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} \pm \operatorname{arc} \sin \frac{2R\sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} = \text{const.}$$

Pour $R = \infty$, on retrouve le système comprenant une famille de paraboloides et les surfaces

$$\sqrt{x^2 + z^2} \pm \sqrt{y^2 + z^2} = \text{const.}$$

La forme très-symétrique des résultats obtenus précédemment nous conduit, en outre, à plusieurs généralisations qui ne nous paraissent pas dépourvues d'intérêt.

Considérons d'abord les n fonctions obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$(157) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1} \dots \left(\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}\right)^{m_n} \lambda^\alpha$$

et sa dérivée par rapport à λ

$$(158) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} + \frac{\alpha}{\lambda} = 0.$$

On aura n fonctions u_1, \dots, u_n correspondant aux n valeurs de λ . Je dis que ces n fonctions forment un système orthogonal. En effet, pour deux fonctions u_1, u_2 , correspondant aux racines λ_1, λ_2 , la relation

d'orthogonalité sera

$$\frac{x_1^2}{\left(\lambda_1 + \frac{x_1^2}{m_1}\right) \left(\lambda_2 + \frac{x_2^2}{m_1}\right)} + \dots + \frac{x_n^2}{\left(\lambda_1 + \frac{x_n^2}{m_n}\right) \left(\lambda_2 + \frac{x_n^2}{m_n}\right)} = 0.$$

Il est facile de vérifier cette relation. Il suffit d'exprimer que λ_1, λ_2 vérifient l'équation (158), et d'éliminer α entre les deux équations ainsi obtenues. On retombe sur l'équation qu'il s'agit de vérifier.

Dans le cas de trois variables, on a le théorème suivant :

Les enveloppes des surfaces, représentées par l'équation

$$u = \left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)^p \lambda^q,$$

où l'on fait varier λ , forment un système triplement orthogonal.

Remarquons que ce système triple jouit toujours de la propriété si remarquable du système des surfaces du second degré. Les trois familles qui le composent sont représentées par la même équation, et il donne d'ailleurs des surfaces algébriques toutes les fois que les rapports de m, n, p, q sont commensurables.

Toutefois il y a un cas singulier qui se présente quand la somme des exposants

$$m + n + p + q = 0$$

est nulle. Alors il n'y a que deux familles orthogonales qui sont composées de cônes ayant pour sommet l'origine. La troisième famille est évidemment formée des sphères ayant pour centre le sommet commun des cônes.

Il est clair qu'on peut aussi appliquer la proposition générale au cas de cinq variables et en déduire des théorèmes pour le cas de trois dimensions, en employant les coordonnées pentasphériques. Il suffira de disposer des constantes de telle manière que les équations obtenues soient homogènes.

Appelons encore x_1, \dots, x_5 les cinq coordonnées pentasphériques d'un point et considérons l'équation

$$(159) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{m_2}\right)^{m_2} \left(\lambda + \frac{x_3^2}{m_3}\right)^{m_3} \left(\lambda + \frac{x_4^2}{m_4}\right)^{m_4} \left(\lambda + \frac{x_5^2}{m_5}\right)^{m_5} \lambda^{m_6}.$$

Si l'on élimine λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ .

$$(160) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda} = 0,$$

on obtiendra une fonction u qui sera homogène et de degré zéro toutes les fois que la somme

$$(161) \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n + m_n = 0$$

sera nulle. D'ailleurs, avec cette hypothèse, l'équation (160) se réduira au troisième degré par rapport à λ . En substituant les trois racines dans l'équation (159), on aura trois fonctions u_1, u_2, u_3 , qui, égales à des constantes, donneront encore trois familles d'un système orthogonal. Ces systèmes orthogonaux jouiront, comme les précédents, de la propriété remarquable que les trois familles seront représentées par une même équation.

Les résultats précédents sont encore susceptibles de plusieurs généralisations que nous allons indiquer successivement et qui nous ont conduit à la détermination des lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces.

Je présenterai sous une forme synthétique la première de ces généralisations. Considérons les $n - 1$ fonctions u obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$(161) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}} \right)^{m_1}, \quad \left(\lambda + \frac{x_n + \alpha_n}{\sqrt{m_n}} \right)^{m_n}$$

et sa dérivée par rapport à λ

$$(162) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n + \alpha_n}{\sqrt{m_n}}} = 0.$$

Je dis que ces $n - 1$ fonctions forment un système orthogonal. Soit en effet u l'une des fonctions, correspondant à une des racines λ de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{u \sqrt{m_1}}{\lambda + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}}.$$

Désignons de même par u' la fonction correspondant à une autre racine λ' , on aura

$$\frac{\partial u'}{\partial x_1} = \frac{u' \sqrt{m_1}}{\lambda' + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}},$$

et la condition d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum \frac{m_1}{\left(\lambda + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right) \left(\lambda' + \frac{x_1 + \alpha_1}{\sqrt{m_1}}\right)} = 0.$$

Or cette relation est satisfaite, car elle est équivalente à celle qu'on obtient en substituant les deux racines λ, λ' dans l'équation (162) et retranchant les résultats obtenus.

On obtient ainsi un système orthogonal incomplet, puisqu'il ne contient que $n - 1$ fonctions, correspondant aux $n - 1$ racines de l'équation (162). On peut trouver facilement une dernière fonction complétant le système, qui sera

$$(163) \quad u = \sqrt{m_1}x_1 + \sqrt{m_2}x_2 + \dots + \sqrt{m_n}x_n,$$

comme il est aisé de le vérifier.

Par exemple, dans le cas de $n = 3$, les enveloppes des surfaces

$$u = \left(\lambda + \frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m \left(\lambda + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \left(\lambda + \frac{z}{\sqrt{p}}\right)^p$$

constituent un système double orthogonal auquel on peut adjoindre la famille de plans parallèles

$$u' = x \sqrt{m} + y \sqrt{n} + z \sqrt{p}.$$

On voit donc que les deux premières familles seront composées de cylindres, et l'on a par conséquent un système trop particulier. Mais on peut éviter cet inconvénient et obtenir un système dont aucune des familles n'est composée de plans, en revenant au cas général et raisonnant comme il suit.

Considérons le système orthogonal formé des $n - 1$ familles obtenues en éliminant λ entre les équations (161), (162) et de la fa-

précédents, mais sur lequel je n'insiste pas, parce qu'il donne des fonctions transcendantes.

Les n fonctions obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$u = \left(\lambda + \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \right)^{m_1} \dots \left(\lambda + \frac{x_n}{\sqrt{m_n}} \right)^{m_n} e^{a\lambda}$$

et sa dérivée par rapport à λ forment un système orthogonal.

Les mêmes résultats sont évidemment applicables au système des coordonnées pentasphériques, et l'on obtient alors la proposition qui suit :

Les enveloppes des surfaces représentées par l'équation

$$(166) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} \right)^{m_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_6}{\sqrt{m_6}} \right)^{m_6},$$

où l'on a

$$m_1 + m_2 + \dots + m_6 = 0,$$

et où x_1, \dots, x_6 sont des fonctions linéaires de $x^2 + y^2 + z^2, x, y, z$, assujetties à vérifier les deux identités

$$x_1\sqrt{m_1} + \dots + x_6\sqrt{m_6} = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0,$$

forment un système triple orthogonal.

Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que la dérivée par rapport à λ de l'équation (166) se réduit au troisième degré; à chacune des trois racines correspond une des familles du système.

§ XI bis. — *Généralisation des résultats précédents et détermination des lignes de courbure d'une classe étendue de surfaces.*

La méthode que nous avons suivie dans l'étude des questions précédentes avait pour point de départ l'examen du cas où l'une des fonctions du système orthogonal est de la forme

$$u = m \log x_1 + \dots + m_n \log x_n.$$

Nous allons voir maintenant qu'elle est susceptible de s'appliquer au cas le plus général où u est de la forme

$$u = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

les fonctions X_1, \dots, X_n étant choisies d'une manière arbitraire parmi celles qui vérifient les équations déjà trouvées

$$X_i' X_i'' - 2 X_i'^2 = \lambda X_i' + \mu,$$

que l'on peut écrire

$$(167) \quad X_i' X_i'' = 2(X_i' - a)(X_i' - b).$$

Dans le Mémoire déjà cité, M. Serret a montré comment on pouvait intégrer complètement cette équation. La solution la plus générale, pour l'une quelconque des fonctions, que nous désignerons par X , s'obtiendra en éliminant X'' entre les deux équations

$$(168) \quad \begin{cases} x - x_0 = \frac{m}{2} \int (X'' - a)^{\frac{a}{2(a-b)-1}} (X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)-1}} dX'', \\ X - X_0 = \frac{m^2}{2} \int (X'' - a)^{\frac{a}{a-b}-1} (X'' - b)^{\frac{b}{b-a}-1} dX''. \end{cases}$$

Supposons donc que l'on ait trouvé les fonctions X_i , on aura la première famille du système. Nous allons établir ce résultat nouveau, que la détermination des autres familles se ramène à de simples quadratures. Nous donnerons même une proposition plus générale, en apprenant à composer avec les fonctions X_i un système orthogonal comprenant celui que nous cherchons comme cas particulier.

Supposons donc qu'on ait trouvé les n fonctions X_i satisfaisant aux équations différentielles dont le type est

$$(169) \quad X' X'' = 2(X'' - a)(X'' - b),$$

et déterminons une quantité λ par l'équation de degré n ,

$$(170) \quad \sum \frac{X_i^2}{\lambda - X_i''} + A = 0,$$

où A désigne une constante quelconque. Le signe Σ indique que la somme porte sur toutes les fonctions X_i ; nous supprimons l'indice pour plus de simplicité. Cela posé, considérons la fonction u définie par l'équation

$$(171) \quad u = \int_a^{\lambda_k} \frac{X_i^2 \varpi(\lambda) d\lambda}{\lambda - X_i''} + \int_a^{\lambda_k} A \varpi(\lambda) d\lambda,$$

où l'on met pour λ_k une quelconque des racines de l'équation (170).

Dans les quadratures, X'_i , X''_i sont traités comme des constantes. Nous avons donc une fonction dont la dérivée par rapport à λ_k est toujours nulle; mais il n'en est pas de même des dérivées par rapport aux variables x_1, \dots, x_n ; $\varpi(\lambda)$ et α sont une fonction et une constante que nous déterminerons dans le cours de la démonstration. En différenciant l'équation (171) par rapport à l'une quelconque des variables x_i , et remarquant que la dérivée de u par rapport à λ_k étant nulle, on peut traiter λ_k comme une constante, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_a^{\lambda_k} \left[\frac{X' X''}{(\lambda - X'')^2} + \frac{2 X' X''}{\lambda - X''} \right] \varpi(\lambda) d\lambda,$$

ou, en remplaçant $X' X''$ par sa valeur tirée de l'équation (169), et réduisant,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 X' \int_a^{\lambda_k} \frac{\varpi(\lambda) d\lambda}{\lambda - X''} \left[a + b - \lambda + \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{\lambda - X''} \right].$$

Déterminons la fonction ϖ par la condition

$$(172) \quad \frac{d}{d\lambda} [\varpi(\lambda) (\lambda - a) (\lambda - b)] = \varpi(\lambda) (\lambda - a - b),$$

et la constante α par la condition

$$(173) \quad \frac{\varpi'(\alpha) (\alpha - a) (\alpha - b)}{\alpha - X''} = 0,$$

l'intégrale qui figure dans l'expression de $\frac{\partial u}{\partial x}$ pourra être déterminée, et l'on trouvera

$$(174) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{2 X'_i}{\lambda - X''_i} \varpi(\lambda_k) (\lambda_k - a) (\lambda_k - b).$$

Cette expression des dérivées de u nous montre que les n fonctions u_1, \dots, u_n correspondant aux n racines de l'équation (170) forment un système orthogonal, car, pour deux quelconques de ces fonctions u_1, u_2 correspondantes aux racines λ_1, λ_2 , la relation d'orthogonalité prendra la forme

$$\sum \frac{X'_i}{(\lambda_1 - X''_i) (\lambda_2 - X''_i)} = 0,$$

et elle est une conséquence des équations que l'on obtient en remplaçant λ par λ_1, λ_2 dans l'équation (170).

Avant de continuer la discussion, voyons comment on déterminera la fonction $\varpi(\lambda)$ et la constante α . L'équation (172) se ramène à la forme

$$\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda),$$

et elle admet pour intégrale

$$\varpi(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}} (\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}}.$$

La somme des deux exposants $\frac{a}{b-a}, \frac{b}{a-b}$ étant -1 , l'un au moins est plus grand que -1 . Supposons, pour fixer les idées,

$$\frac{a}{b-a} > -1,$$

et par conséquent, en ajoutant l'unité aux deux membres,

$$\frac{b}{b-a} > 0,$$

alors la constante α devant annuler

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha - X''} = \frac{(\alpha - a)^{\frac{a}{b-a}}(\alpha - b)^{\frac{b}{a-b}}}{\alpha - X''},$$

nous pouvons prendre $\alpha = a$. Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'on détermine n valeurs de λ par l'équation

$$(175) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_i^2}{\lambda - X_i''} + \Lambda = 0,$$

les fonctions X_i satisfaisant aux équations différentielles

$$X_i X_i'' = 2(X_i' - a)(X_i'' - b),$$

les n fonctions

$$u_i = \Sigma X_i^2 \int_a^{\lambda_k} \frac{(\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}} (\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}}}{\lambda - X_i''} d\lambda + \Lambda \int_a^{\lambda_k} (\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}} (\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}} d\lambda,$$

où λ_k désigne une des racines de l'équation (175) où a est celui des deux nombres a et b pour lequel l'exposant de $\lambda - a$ est plus grand que -1 et où les intégrales sont prises en considérant λ comme seule variable, ces n fonctions forment un système orthogonal.

On verra d'ailleurs très-facilement que, dans le cas où A est nul, l'équation en λ se réduisant au degré $n - 1$, on n'a plus que $n - 1$ fonctions orthogonales, et que le système peut être complété par l'adjonction de la fonction

$$u = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

On retrouve ainsi les systèmes étudiés par M. Serret pour le cas de $n = 3$, et l'on obtient ce résultat important que la détermination de toutes les familles, et par conséquent celle des lignes de courbure des surfaces qui le composent, se ramènent à de simples quadratures.

Les résultats précédents, qui nous paraissent élégants, montrent l'utilité qu'il peut y avoir dans certains cas à étudier la Géométrie à n dimensions, ou, si l'on veut, l'Analyse à n variables. Il est clair que c'est seulement pour introduire la symétrie dans des calculs qui, très-possibles dans le cas de trois variables, seraient inextricables dans le cas général, que nous avons introduit cette variable λ , dont l'emploi joue un rôle fondamental dans notre analyse et nous a donné les propositions précédentes.

Nous allons, en terminant, donner une nouvelle et dernière généralisation des résultats précédents qui nous conduira aux lignes de courbure d'un nombre assez grand de surfaces algébriques et transcendentes.

Considérons maintenant l'équation

$$(176) \quad \sum \frac{X_i'}{\lambda - X_i'} - 2(k-1)(X_1 + \dots + X_n) = 0,$$

qui détermine n valeurs de λ . Nous supposerons que les fonctions X_i satisfassent aux équations différentielles

$$(177) \quad X' X'' = 2k(X'' - a)(X'' - b).$$

Multiplions l'équation (176) par $\varpi(\lambda) d\lambda$, $\varpi(\lambda)$ étant à déterminer, et intégrons-la en considérant toujours λ comme seule variable. Nous aurons

$$u = \sum \int_a^{\lambda_k} \frac{X_i' \varpi(\lambda) d\lambda}{\lambda - X_i'} - 2(k-1) \int_a^{\lambda_k} (X_1 + \dots + X_n) \varpi(\lambda) d\lambda,$$

α étant une constante à déterminer et λ_k étant une des racines de l'équation (176). On obtient ainsi une fonction dont la dérivée partielle par rapport à λ_k est nulle, et dont par conséquent la dérivée par rapport à x_i se réduit aux seuls termes

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_a^{\lambda_k} \left[\frac{X_i X_i''}{(\lambda - X_i')^2} - \frac{2 X_i' X_i''}{\lambda - X_i'} - 2(k-1) X_i' \right] \varpi(\lambda) d\lambda.$$

En remplaçant X_i'' par sa valeur tirée de l'équation (177), nous aurons, après quelques réductions,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 2 X_i' \int_a^{\lambda_k} \left[\frac{k(\lambda - a)(\lambda - b)}{(\lambda - X_i')^2} - \frac{(2k-1)\lambda - k(a+b)}{\lambda - X_i'} \right] \varpi(\lambda) d\lambda.$$

Cela posé, définissons la fonction $\varpi(\lambda)$ par la condition

$$(178) \quad k \frac{d}{d\lambda} (\lambda - a)(\lambda - b) \varpi(\lambda) = [(2k-1)\lambda - k(a+b)] \varpi(\lambda)$$

et la constante α par la condition

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha - X_i''} = 0.$$

L'intégrale qui exprime $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pourra être déterminée, et l'on trouvera

$$(179) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -2 X_i' \frac{k \varpi(\lambda_i) (\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{\lambda_i - X_i'}.$$

Il suit de là que les n fonctions u_1, \dots, u_n , correspondant aux n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de l'équation (176), forment un système orthogonal; car, pour les deux fonctions u_1, u_2 , par exemple, la condition d'orthogonalité

$$\sum \frac{X_i''}{(\lambda_i - X_i')(\lambda_j - X_i')} = 0$$

est identique à celle qu'on obtient, en substituant λ_1, λ_2 dans l'équation (176), et retranchant les deux équations ainsi obtenues.

La fonction $\varpi(\lambda)$ se détermine sans difficulté au moyen de l'équation (178). On trouve

$$(180) \quad \varpi(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{a}{k(b-a)}} (\lambda - b)^{\frac{b}{k(a-b)}}.$$

La constante α est ensuite déterminée par la condition.

$$\frac{(\alpha - a)^{\frac{a}{k(b-a)+1}} (\alpha - b)^{\frac{b}{k(a-b)+1}}}{\alpha - \lambda_i} = 0.$$

Si l'un des exposants du numérateur est positif, on prendra $\alpha = a$ ou $\alpha = b$; s'ils sont négatifs, on prendra $\alpha = \pm \infty$.

En résumant tout ce qui précède, nous obtenons le théorème suivant :

Considérons n fonctions X_1, \dots, X_n dépendant chacune uniquement de la variable de même indice et satisfaisant aux équations différentielles

$$(181) \quad X_i X_i'' = 2k(X_i - a)(X_i - b).$$

Si nous appelons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n fonctions de x_1, \dots, x_n racines de l'équation

$$(182) \quad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i} - 2(k-1)(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = 0,$$

les n fonctions définies par les quadratures

$$(183) \quad \left\{ \begin{aligned} u_k &= \int_a^{\lambda_k} (\lambda - a)^{\frac{a}{k(b-a)}} (\lambda - b)^{\frac{b}{k(a-b)}} d\lambda \\ &\times \left[\sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i} - 2(k-1)(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \right], \end{aligned} \right.$$

où α est un des trois nombres a, b, ∞ choisi par la seule condition que l'intégrale ait un sens déterminé, forment un système orthogonal.

Si $a = b$, les formules précédentes sont illusoires; mais on se reportera à l'équation différentielle qui détermine $\varpi(\lambda)$.

Il importe de remarquer que, en employant le langage de la Géométrie, une des familles orthogonales précédentes comprend la surface

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0,$$

dont on saura par conséquent déterminer les lignes de courbure.

Supposons, en effet, que l'une des racines λ devienne très-grande,

l'équation (179) nous donnera, pour l'expression approchée de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -2\lambda^{1-\frac{1}{k}} X_i'$$

et par conséquent

$$u = -2\lambda^{1-\frac{1}{k}} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) + C.$$

Or, pour $\lambda = \infty$, l'équation (182) nous donne

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0.$$

On voit donc que l'une des fonctions u demeurera constante pour toutes les valeurs de x_1, \dots, x_n satisfaisant à l'équation précédente.

Traitant à part ce cas particulier qui, nous le verrons, est très-important, nous obtiendrons le théorème suivant, qu'il est du reste très-aisé de vérifier directement.

Les lignes de courbure de la surface définie par l'équation

$$(184) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0,$$

où X_1, \dots, X_n satisfont aux équations

$$(184 \text{ bis}) \quad X_i X_i'' = 2k (X_i' - a) (X_i' - b),$$

se déterminent de la manière suivante. On recherchera les $n - 1$ fonctions λ_k racines de l'équation

$$(185) \quad \sum \frac{X_i^2}{\lambda - X_i} = 0;$$

puis, déterminant une fonction $\varpi(\lambda)$ par l'équation

$$(186) \quad k \varpi'(\lambda) (\lambda - a) (\lambda - b) = -\lambda \varpi(\lambda)$$

et une constante α par la condition

$$\frac{\varpi(\alpha) (\alpha - a) (\alpha - b)}{\alpha} = 0,$$

on calculera les $n - 1$ fonctions

$$u_k = \int_x^{\lambda_k} \varpi(\lambda) \sum \frac{X_i^2}{\lambda - X_i};$$

une seule d'entre elles demeurera variable sur chacune des lignes de courbure du lieu considéré.

Nous allons indiquer une méthode directe qui nous conduira au même résultat, et que, pour plus de netteté, nous allons exposer en supposant le nombre des variables égal à trois.

Proposons-nous le problème suivant :

Trouver les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation

$$(187) \quad X + Y + Z = C.$$

D'après les développements donnés au § X, nous pourrions présenter cette recherche de la manière suivante.

On déterminera, pour chaque point de la surface, les deux racines de l'équation

$$(188) \quad \frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''} = 0.$$

Les équations différentielles des lignes de courbure seront

$$(189) \quad \frac{X'dx}{\lambda - X''} + \frac{Y'dy}{\lambda - Y''} + \frac{Z'dz}{\lambda - Z''} = 0,$$

où λ désigne une des deux racines de l'équation précédente.

La forme de l'équation précédente nous montre que nous saurions intégrer si λ était une constante sur chaque ligne de courbure. C'est ce qui a lieu pour les surfaces du second degré. Mais, en général, λ varie sur chaque ligne de courbure, et l'intégration ne peut se faire immédiatement. Comme on a aussi, en vertu de l'équation de la surface,

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = 0,$$

cherchons si l'on peut déterminer trois fonctions de λ , telles que l'expression

$$\left(\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''} \right) \varpi(\lambda) d\lambda + f(\lambda) \left(\frac{X'dx}{\lambda - X''} + \frac{Y'dy}{\lambda - Y''} + \frac{Z'dz}{\lambda - Z''} \right) + \varphi(\lambda) (X'dx + Y'dy + Z'dz),$$

où le coefficient de $d\lambda$ est nul en vertu de l'équation (188), devienne une différentielle exacte. En écrivant que la dérivée du coefficient de dx ,

par rapport à λ , est égale à celle du coefficient de λ par rapport à x , on trouve

$$2\varpi(\lambda)X''(\lambda - X'') + \varpi(\lambda)X'X''' + f'(\lambda)(\lambda - X'') - f(\lambda) + \varphi'(\lambda)(\lambda - X'')^2 = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite identiquement, il faut que X' , X'' , X''' , X''^2 , X'' soient liées par une relation linéaire, et par conséquent que l'on ait une équation de la forme

$$(190) \quad X'X''' = 2k(X'' - a)(X'' - b).$$

En substituant la valeur de $X'X'''$ déduite de cette équation et en écrivant que les coefficients de X''^2 , X'' et le terme indépendant de X'' sont nuls dans l'équation précédente, nous aurons les trois équations

$$\begin{aligned} 2(1 - k)\varpi(\lambda) &= \varphi'(\lambda), \\ 2\varpi(\lambda)[k(a + b) - \lambda] &= -f'(\lambda) - 2\lambda\varphi'(\lambda), \\ 2kab\varpi(\lambda) &= -\lambda f'(\lambda) + f(\lambda) - 2\lambda\varphi'(\lambda). \end{aligned}$$

On déduit facilement de là

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= 2\varpi(\lambda)[(2k - 1)\lambda - k(a + b)], \\ f(\lambda) &= 2kab\varpi(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b), \end{aligned}$$

et, en éliminant $f(\lambda)$,

$$k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda).$$

Les trois fonctions cherchées seront donc données par les trois équations

$$(191) \quad \begin{cases} k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda), \\ f(\lambda) = 2kab\varpi(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b), \\ \varphi'(\lambda) = 2(1 - k)\varpi(\lambda). \end{cases}$$

On voit d'ailleurs que, si Y, Z satisfont à des équations toutes pareilles à l'équation (190), toutes les conditions d'intégrabilité seront satisfaites. Ce point étant établi, le calcul s'achève sans difficulté, et nous obtenons le théorème déjà donné :

Les lignes de courbure de la surface

$$(192) \quad X + Y + Z = C,$$

où les trois fonctions X, Y, Z satisfont aux équations

$$(193) \quad \begin{cases} X'X'' - 2k(X'' - a)(X'' - b) = 0, \\ Y'Y'' - 2k(Y'' - a)(Y'' - b) = 0, \\ Z'Z'' - 2k(Z'' - a)(Z'' - b) = 0, \end{cases}$$

sont à l'intersection de la surface et des enveloppes des surfaces

$$(194) \quad u = \int_a^\lambda \varpi(\lambda) \left(\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''} \right) d\lambda,$$

où $\varpi(\lambda)$ est une fonction satisfaisant à l'équation

$$(195) \quad k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda)$$

et où α est un des trois nombres a, b, ∞ défini par la condition

$$(196) \quad \frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha} = 0,$$

qu'il est toujours possible de vérifier.

Indiquons quelques applications de ce théorème. Supposons d'abord que les constantes a et b soient nulles; nous aurons

$$X'X'' = 2kX'^2.$$

L'hypothèse $k = 1$ a été examinée. L'intégrale de l'équation précédente est

$$X = \alpha + a(x - x_0)^m,$$

où m est défini par l'équation

$$(197) \quad \frac{m-2}{m-1} = 2k.$$

L'hypothèse $2k = 1$ sera traitée à part. Nous pouvons faire $\alpha = x_0 = 0$, et nous obtenons comme solution ax^m . La surface correspondante sera donc représentée par une équation de la forme

$$(198) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

où m sera quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On sait que Lamé, dans son opuscule sur les méthodes en Géométrie, a le premier étudié ces surfaces que M. de la Gournerie, qui en a fait connaître plusieurs propriétés, nomme *tétraédrales symétriques*.

On trouve ici

$$\omega = \lambda^{\frac{2(1-m)}{m-2}};$$

l'équation (196), si l'on y change λ en $\frac{1}{\mu}$, prend la forme

$$u = \frac{x^m}{a^m} \int_a^x \frac{\mu^{\frac{m}{m-2}} d\mu}{\mu - a^m x^{2-m}} + \frac{\gamma^m}{b^m} \int_a^x \frac{\mu^{\frac{m}{m-2}} d\mu}{\mu - b^m \gamma^{2-m}} + \frac{z^m}{c^m} \int_a^x \frac{\mu^{\frac{m}{m-2}} d\mu}{\mu - c^m z^{2-m}}.$$

Chaque ligne de courbure s'obtiendra en donnant à u une valeur constante et éliminant μ entre cette équation et sa dérivée

$$\frac{x^m}{a^m(\mu - a^m x^{2-m})} + \frac{\gamma^m}{b^m(\mu - b^m \gamma^{2-m})} + \frac{z^m}{c^m(\mu - c^m z^{2-m})} = 0.$$

Le résultat sera évidemment compliqué; les équations des lignes de courbure contiendront toujours des logarithmes et une partie algébrique.

Par exemple, pour la surface

$$(199) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{\gamma}{b}\right)^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 = 1,$$

en effectuant les intégrations, on aura

$$u = \frac{\mu^3}{3} + \frac{\mu^2}{3}(x^2 + \gamma^2 + z^2) + \mu(a^2 x + b^2 \gamma + c^2 z) \\ + \log \left(1 - \frac{\mu x}{a^3}\right)^{a^3} \left(1 - \frac{\mu \gamma}{b^3}\right)^{b^3} \left(1 - \frac{\mu z}{c^3}\right)^{c^3},$$

et il y aura à éliminer μ entre cette équation et sa dérivée (algébrique) par rapport à μ .

Quoi qu'il en soit, on voit que nous savons déterminer les lignes de courbure de deux surfaces du troisième ordre, l'une

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$

qui est la surface à quatre points doubles, l'autre qui est représentée par l'équation (197).

Nous savons de même déterminer les lignes de courbure des deux surfaces du quatrième ordre

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^4 = 1,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1.$$

La seconde de ces équations représente la surface de Steiner.

Si l'on a $k = \frac{1}{2}$, l'équation (197) ne détermine aucune valeur de m . Alors on a

$$X = ae^{ms},$$

et la surface correspondante a pour équation

$$(200) \quad e^{ms} + e^{ny} + e^{pz} = 1.$$

Ici l'on a $\varpi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, et, en changeant encore λ en $\frac{1}{\lambda}$, on trouve

$$u = e^{ms} \log(1 - \lambda m^2 e^{ms}) + e^{ny} \log(1 - \lambda n^2 e^{ny}) + e^{pz} \log(1 - \lambda p^2 e^{pz});$$

il faudra éliminer λ entre cette équation et sa dérivée.

Je terminerai en énumérant quelques-unes des surfaces auxquelles s'applique la méthode précédente. On voit d'abord facilement que l'on peut ajouter des termes aux équations déjà données et traiter les surfaces représentées par l'équation

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

où a, b, c, α, C sont des constantes quelconques. Cette remarque nous

permet d'ajouter aux surfaces du troisième et du quatrième ordre, déjà données, les suivantes :

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

$$\frac{a}{x} + b(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

$$ax^4 + by^4 + cz^4 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C;$$

je signalerai aussi les surfaces transcendentes

$$\frac{\cos mx}{m^2} + \frac{\cos ny}{n^2} + \frac{\cos pz}{p^2} = C,$$

$$C \left(\frac{e^{mx}}{m^2} + \frac{e^{ny}}{n^2} + \frac{e^{pz}}{p^2} \right) + C' \left(\frac{e^{-mx}}{m^2} + \frac{e^{-ny}}{n^2} + \frac{e^{-pz}}{p^2} \right) = C'',$$

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx + \int \sqrt{y^2 + \beta} dy + \int \sqrt{z^2 + \gamma} dz = C.$$

Du reste, on peut trouver toutes les surfaces répondant au problème posé, et si, pour plus de symétrie, on remplace

$$2k, a, b \quad \text{par} \quad \frac{1}{m+n}, \quad -mh, \quad nh,$$

on aura

$$X' X'' = \frac{1}{m+n} (X'' - mh)(X'' + nh),$$

$$X' = \frac{C}{m+n} (X'' - mh)^m (X'' + nh)^n,$$

$$x = C \int (X'' - mh)^{m-1} (X'' + nh)^{n-1} dX'',$$

$$X = \frac{C^2}{m+n} \int (X'' - mh)^{m-1} (X'' + nh)^{n-1} dX''.$$

Les quadratures indiquées peuvent être effectuées toutes les fois que l'un des nombres $m, n, m+n$ sera entier.

Je terminerai en remarquant que, tout ce qui précède s'appliquant à un nombre quelconque de variables, on pourra employer les coordonnées pentasphériques, pourvu que les équations soient homogènes. On saura donc déterminer les lignes de courbure des surfaces représentées par l'équation

$$ax_1^m + bx_2^m + cx_3^m + dx_4^m + ex_5^m = 0,$$

où m est quelconque, ainsi que les constantes a, b, c, d, e . L'équation la plus simple des surfaces précédentes serait, en ramenant par une inversion trois des sphères à des plans,

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^m + \beta(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^m = 0.$$

Si $\beta = 0$, on a les surfaces

$$ax^m + by^m + cz^m + \alpha \left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right)^m = 0,$$

qui, pour $R = \infty$, se réduisent aux surfaces tétraédrales de Lamé.

Les formules étant les mêmes que pour le cas de trois variables, je me dispenserai de les transcrire.

Je me suis demandé quel était le résultat le plus général obtenu dans le cas des surfaces du troisième degré, et si les surfaces obtenues précédemment étaient les transformées homographiques de la surface la plus générale du troisième degré. Il est aisé de répondre à cette question.

La surface représentée par l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta = 0$$

peut toujours être ramenée, par une translation des axes, à la forme

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + (\alpha x + \beta y + \gamma z) t^2 + \delta t^3 = 0.$$

Or cette équation nous montre que les plans tangents, menés de l'origine à la surface, sont tangents à deux cônes cubiques, dont l'un a pour équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

L'origine est donc un point double de la hessienne, et la seule particularité que présente la surface consiste en ce que l'un des cônes, celui qui est représenté par l'équation précédente, est un cône triangulaire.

Dans la surface générale, son équation ne pourrait être ramenée qu'à la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 3kxyz = 0.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Toute surface du troisième ordre, pour laquelle l'un des vingt cônes circonscrits suivant une section plane à la surface est un cône triangulaire, peut être transformée homographiquement en une autre dont o détermine les lignes de courbure.

SUR UN POINT IMPORTANT
DE LA
THÉORIE DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES,

PAR M. F. TISSERAND,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE TOULOUSE (').

On sait que les éléments elliptiques des planètes sont soumis à deux genres d'inégalités, les inégalités périodiques et les inégalités séculaires : ces dernières sont d'une grande importance, surtout dans la question de la stabilité du système planétaire. Laplace a montré le premier, en 1773, que, dans la première approximation, les grands axes des orbites, seuls parmi tous les éléments elliptiques, ne contiennent pas de termes séculaires ; mais il n'avait obtenu cet important résultat qu'en tenant compte des premières et des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons supposées très-petites. En 1776, Lagrange établit, d'un trait de plume, pour employer une expression de Jacobi, que le théorème a lieu quelque loin qu'on pousse l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, mais en s'arrêtant à la première approximation relative aux termes proportionnels aux masses des planètes.

Dans un Mémoire publié en 1808, Poisson fit faire un pas de plus à la question ; il arriva à démontrer l'invariabilité des grands axes, même en tenant compte des termes affectés des carrés et des produits des masses, termes qui sont introduits par la seconde approximation ; il réussit à montrer que cette approximation ne peut amener, dans les expressions des grands axes, aucun terme proportionnel au

(') Ce Mémoire a paru déjà dans le volume de 1875 des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse* ; je l'avais rédigé en novembre 1874, au Japon, où j'étais allé observer le passage de Vénus sur le Soleil.
F. TISSERAND.

temps. La démonstration de Poisson comprend deux parties : la première est très-simple : c'est celle dans laquelle on examine l'effet des variations des éléments de la planète troublée ; la seconde partie, où l'on tient compte des variations des éléments de la planète troublante, est très-compiquée ; cela tient à ce que les fonctions perturbatrices ne sont pas les mêmes dans les deux cas ; elles diffèrent, comme on le sait, par les termes en $\frac{xx' + \gamma\gamma' + zz'}{r^3}$ et $\frac{xx' + \gamma\gamma' + zz'}{r^3}$. Si les fonctions perturbatrices avaient été les mêmes, ou bien avaient été dans un rapport constant, la seconde partie de la démonstration de Poisson aurait été identique à la première, et le théorème se serait ainsi trouvé établi d'une façon très-simple.

Le Mémoire de Poisson rappela l'attention de Lagrange sur ce sujet, et, quelques mois après, il présentait à l'Académie des Sciences un travail dont nous voulons donner une idée.

Il rapporte les planètes, non plus au centre du Soleil, mais au centre de gravité du Soleil et des planètes ; il obtient alors des équations symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes ; il peut donc appliquer la première partie de la démonstration de Poisson et prouver, d'une façon simple, l'invariabilité des grands axes, en ayant égard aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices ; mais il s'agit des grands axes des orbites elliptiques variables, décrites par les planètes autour du centre de gravité considéré plus haut. Il fallait passer de là à l'invariabilité des grands axes des orbites décrites autour du centre du Soleil ; soient 2α le grand axe de l'orbite d'une planète dans le premier cas, 2α dans le second. Lagrange arrive à trouver la relation

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2,$$

φ_1 étant une fonction des coordonnées des deux planètes, comme φ_2 ; mais φ_1 est une fonction du premier ordre relativement aux masses, tandis que φ_2 est du second ordre. Si donc on néglige le troisième ordre, il suffira de substituer dans φ_2 les valeurs x, y, z, x', y', z' exprimées avec le temps et les éléments elliptiques constants ; on n'obtiendra ainsi aucun terme proportionnel au temps ; dans φ_1 , il faut remplacer

les coordonnées par leurs valeurs exprimées au moyen du temps et des éléments elliptiques variables, fournis par la première approximation. Cette substitution pourra introduire dans φ_1 un terme proportionnel au temps; mais ce terme disparaîtra quand on formera $\frac{d\varphi_1}{dt}$. Telle est la méthode suivie par Lagrange; malheureusement l'expression à laquelle il est arrivé pour exprimer la différence entre $\frac{1}{2a}$ et $\frac{1}{2\alpha}$, au moyen de la somme $\frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2$, est inexacte, par suite de plusieurs fautes de calcul, comme l'a montré M. J.-A. Serret dans sa nouvelle édition des *Œuvres de Lagrange*, et la démonstration se trouve ainsi réduite à néant.

J'ai remarqué qu'il suffisait de rapprocher le commencement du Mémoire de Lagrange de certains passages du célèbre Mémoire de Jacobi *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, pour donner une démonstration très-simple et très-satisfaisante du théorème de Poisson.

Les passages du Mémoire de Jacobi, auxquels je viens de faire allusion, ont été repris et développés par M. Radau (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. V). Il a montré dans ce travail que, si l'on rapporte le mouvement de la première planète au Soleil, celui de la deuxième au centre de gravité de la première planète et du Soleil, celui de la troisième au centre de gravité des deux premières planètes et du Soleil, et ainsi de suite, les coordonnées relatives dépendent d'équations différentielles symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même. En partant de là, j'ai donc vu que la première partie de la démonstration de Poisson s'appliquait comme dans le cas considéré par Lagrange, où l'on rapporte tous les mouvements des planètes au centre de gravité du Soleil et de ces planètes; donc tous les grands axes des orbites elliptiques variables ne contiennent aucun terme proportionnel au temps, en ayant égard aux carrés et au produit des masses; mais le mouvement de la première planète se trouve tout rapporté au Soleil; donc, au lieu d'avoir, comme Lagrange,

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2,$$

on a simplement

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha}.$$

et le théorème est ainsi démontré pour la première planète. Il est bien vrai que la démonstration n'est pas faite pour les autres planètes; mais rien ne s'oppose à ce qu'on fasse jouer à la seconde planète le rôle assigné à la première, et l'on voit ainsi que le théorème a lieu pour toutes les planètes.

J'aurais pu terminer ici mon travail, renvoyant le lecteur au Mémoire de Lagrange et à celui de M. Radau; mais j'ai préféré effectuer les calculs dans le cas de deux planètes, car le résultat du calcul me permet de compléter le sujet que j'avais traité dans ma thèse de doctorat en 1868. J'avais étendu la belle méthode, suivie par M. Delaunay dans sa théorie de la Lune, à l'étude des mouvements de Jupiter et Saturne; mais je n'avais pas la même fonction perturbatrice pour ces deux planètes, et j'avais dû laisser de côté, pour être traités à part, les termes en $\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}$. Aujourd'hui, en rapprochant les résultats de ce Mémoire avec ceux obtenus dans ma thèse, je puis donner une méthode d'approximation rigoureuse pour le problème des trois corps.

Je vais indiquer les calculs en considérant seulement deux planètes et le Soleil; la marche suivie s'étendra sans aucune difficulté à un nombre quelconque de planètes.

Soient, relativement à trois axes rectangulaires fixes,

$$x_0, y_0, z_0, \quad x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2,$$

les coordonnées des trois corps M_0, M_1, M_2, M_0 étant le Soleil: nous désignerons par m_0, m_1, m_2 leurs masses respectives, de sorte que les rapports $\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0}$ seront des nombres petits, égaux au plus à $\frac{1}{1000}$. Appelons $\delta_{0,1}, \delta_{0,2}, \delta_{1,2}$ les distances M_0M_1, M_0M_2, M_1M_2 ; en désignant la fonction des forces par U , appelant f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, les équations différentielles du mouvement seront

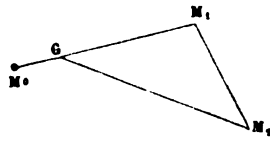
$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{dU}{dx_0}, \quad m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{dU}{dy_0}, \quad m_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{dU}{dz_0}, \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dU}{dx_1}, \quad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{dU}{dy_1}, \quad m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{dU}{dz_1}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{dU}{dx_2}, \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{dU}{dy_2}, \quad m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{dU}{dz_2}, \end{array} \right.$$

où

$$(2) \quad U = \frac{fm_0m_1}{\delta_{0,1}} + \frac{fm_0m_2}{\delta_{0,2}} + \frac{fm_1m_2}{\delta_{1,2}},$$

$$(3) \quad \begin{cases} \delta_{0,1}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \\ \delta_{0,2}^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2, \\ \delta_{1,2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{cases}$$

Cela posé, nous allons faire un changement de variables; soit G le centre de gravité du Soleil M_0 et de la première planète M_1 ; nous allons introduire les coordonnées relatives ξ_1, η_1, ζ_1 du point M_1 par rapport



au point M_0 , et les coordonnées relatives ξ_2, η_2, ζ_2 de la seconde planète M_2 par rapport au point G; en remarquant que les coordonnées du point G sont respectivement

$$\frac{m_0x_0 + m_1x_1}{m_0 + m_1}, \quad \frac{m_0y_0 + m_1y_1}{m_0 + m_1}, \quad \frac{m_0z_0 + m_1z_1}{m_0 + m_1},$$

nous aurons donc

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + \xi_1, & x_2 = \frac{m_0x_0 + m_1x_1}{m_0 + m_1} + \xi_2, \\ y_1 = y_0 + \eta_1, & y_2 = \frac{m_0y_0 + m_1y_1}{m_0 + m_1} + \eta_2, \\ z_1 = z_0 + \zeta_1, & z_2 = \frac{m_0z_0 + m_1z_1}{m_0 + m_1} + \zeta_2. \end{cases}$$

Désignons par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble du Soleil et des deux planètes, en sorte que

$$(5) \quad \begin{cases} (m_0 + m_1 + m_2) X = m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2, \\ (m_0 + m_1 + m_2) Y = m_0y_0 + m_1y_1 + m_2y_2, \\ (m_0 + m_1 + m_2) Z = m_0z_0 + m_1z_1 + m_2z_2, \end{cases}$$

Des formules (4) et (5) nous tirerons aisément

$$6) \quad \begin{cases} x_0 = X - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1 - \frac{m_2}{m_0 + m_2 + m_3} \xi_2, \\ x_1 = X + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \xi_1 - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \xi_2, \\ x_2 = X + \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \xi_2, \end{cases}$$

et nous aurions les mêmes formules en y et en z .

Formons l'expression de la force vive $2T$ du système; nous avons d'abord

$$7) \quad 2T = m_0 \sum \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + m_1 \sum \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + m_2 \sum \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2,$$

le signe Σ étant défini comme il suit :

$$\sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Remplaçons dans la formule (7) $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ par leurs valeurs fournies par les équations (6); nous trouverons sans peine

$$8) \quad 2T = (m_0 + m_1 + m_2) \sum \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \sum \left(\frac{d\xi_1}{dt} \right)^2 + m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \sum \left(\frac{d\xi_2}{dt} \right)^2.$$

Ainsi le changement de variables employé est tel que le double produit en $\frac{d\xi_1}{dt} \frac{d\xi_2}{dt}$ ne figure pas dans l'expression de la force vive.

Posons, pour abrégé,

$$9) \quad \mu_1 = m_0 \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = (m_0 + m_1) \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

et nous aurons

$$10) \quad 2T = (m_0 + m_1 + m_2) \sum \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \mu_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dt} \right)^2 + \mu_2 \sum \left(\frac{d\xi_2}{dt} \right)^2.$$

Nous pouvons dès lors, par les formules célèbres de Lagrange, écrire

les équations différentielles d'où dépendent les nouvelles variables; elles seront, en ce qui concerne seulement les deux planètes,

$$(11) \quad \begin{cases} \mu_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_1}, & \mu_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_2}, \\ \mu_1 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta_1}, & \mu_2 \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta_2}, \\ \mu_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta_1}, & \mu_2 \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta_2}. \end{cases}$$

Il reste, dans la fonction U, à remplacer les anciennes variables par les nouvelles; or, des formules (6), nous déduisons

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 - x_0 = \xi_1, \\ x_2 - x_0 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1 + \xi_2, \\ x_2 - x_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1 + \xi_2 - \xi_1; \end{cases}$$

posons

$$(13) \quad \begin{cases} r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ r_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, \\ \Delta^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2, \\ S = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2, \end{cases}$$

et, des formules (12), nous tirerons

$$(14) \quad \begin{cases} \delta_{0,1} = r_1, \\ \delta_{0,2} = \sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}, \\ \delta_{1,2} = \sqrt{\Delta^2 + 2 \frac{m_0 + m_1}{m_1} (S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}. \end{cases}$$

On voit que $\delta_{0,1}$ n'est autre chose que r_1 , et que $\delta_{0,2}$ et $\delta_{1,2}$ ne diffèrent respectivement de r_2 et Δ que par des quantités de l'ordre de $\frac{m_1}{m_0}$ ou $\frac{m_2}{m_0}$.

Nous aurons ainsi

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{fm_0 m_1}{r_1} + \frac{fm_0 m_2}{\sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}} \\ &+ \frac{fm_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} (S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on introduit, à la place de la fonction U, une fonction V définie par la relation

$$(16) \quad V = U - f\mu_1 \frac{m_0 + m_1}{r_1} - f\mu_2 \frac{m_0 + m_2}{r_2},$$

les équations (11) deviendront

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \xi_1 &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{dV}{d\xi_1}, \\ \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \eta_1 &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{dV}{d\eta_1}, \\ \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \zeta_1 &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{dV}{d\zeta_1}; \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \xi_2 &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_2 (m_0 + m_1)} \frac{dV}{d\xi_2}, \\ \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \eta_2 &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_2 (m_0 + m_1)} \frac{dV}{d\eta_2}, \\ \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \zeta_2 &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_2 (m_0 + m_1)} \frac{dV}{d\zeta_2}. \end{aligned} \right.$$

On trouve, en partant des formules (15) et (16),

$$V = -\frac{f m_2 (m_0 + m_1) (m_0 + m_2)}{r_2 (m_0 + m_1 + m_2)} + \frac{f m_0 m_2}{\sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}} + \frac{f m_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} (S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(19) \left\{ \begin{aligned} V = f m_0 m_2 & \left[\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}} - \frac{1}{r_2} \right] \\ & + \frac{f m_1 m_2}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} (S - r_1^2) + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r_1^2}} - \frac{f m_1 m_2^2}{(m_0 + m_1 + m_2) r_2} \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, on voit bien que la fonction V est du second ordre par rapport aux masses, de sorte qu'en la substituant dans les seconds membres des équations (17) et (18) on trouvera que ces seconds membres sont du premier ordre, relativement aux masses des planètes; cette fonction V va donc jouer ici le rôle de la fonction perturbatrice dans la méthode ordinaire. Nous sommes parvenus à ce résultat important que la fonction V est la même dans les équations différentielles du mouvement des deux planètes. On développera, du reste, aisément V suivant les puissances des petites quantités $\frac{m_1}{m_0}$ et $\frac{m_2}{m_0}$; on écrira

$$V = V_2 + V_3 + \dots,$$

avec les valeurs suivantes de V_2, V_3, \dots ,

$$\begin{aligned} V_2 &= f m_1 m_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{S}{r_2^2} \right), \\ V_3 &= -f m_1 m_2 \left[\frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{S - r_1^2}{\Delta^2} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{1}{2r_2^2} \left(r_1^2 - \frac{3S^2}{r_2^2} \right) + \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \frac{1}{r_2} \right]. \end{aligned}$$

Il n'y aura d'autre difficulté que la longueur à pousser ce développement aussi loin qu'on le voudra. Dans la théorie ordinaire, on développe S et $\frac{1}{\Delta}$; ces développements serviront ici.

La recherche du mouvement des deux planètes est donc ramenée à l'intégration des équations (17) et (18), dans lesquelles V a la valeur (19). Si, dans ces équations, on supprime les seconds membres, on a deux mouvements elliptiques qui donnent les valeurs de $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$, en fonction du temps et des éléments elliptiques; substituant ces valeurs dans l'expression de V , on réduira aisément cette fonc-

tion en une série périodique, et l'on pourra procéder aux approximations successives. Les équations (17) et (18), étant de la même forme que celles que Lagrange avait trouvées pour les mouvements autour du centre de gravité commun, peuvent être traitées de la même manière. En appliquant donc la première partie de la démonstration de Poisson, on démontrera que les grands axes des orbites elliptiques de M_1 autour de M_0 et de M_2 autour du centre de gravité de M_0 et M_1 , n'ont pas d'inégalités séculaires, en tenant compte des termes de l'ordre du carré des masses. Mais l'orbite elliptique de M_1 est toute rapportée au Soleil; le théorème est donc démontré pour le mouvement de la planète M_1 autour du Soleil. On peut recommencer les mêmes raisonnements en rapportant M_2 à M_0 et M_1 au centre de gravité de M_0 et M_2 , et l'on démontrera ainsi la même chose pour l'orbite de M_2 autour du Soleil.

J'arrive maintenant à compléter le sujet traité dans ma thèse; j'avais pour but de donner une méthode d'approximation rigoureuse dans le problème du mouvement de Jupiter et de Saturne; je suppose que M_1 est Jupiter, et M_2 Saturne. Dans la transformation qui a été faite, ξ_1, η_1, ζ_1 sont donc les coordonnées de Jupiter rapportées au Soleil, tandis que ξ_2, η_2, ζ_2 sont les coordonnées de Saturne rapportées au centre de gravité du Soleil et de Jupiter.

Si, dans les équations (17) et (18) nous supprimons les seconds membres, nous aurons les équations

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \xi_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \eta_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} \zeta_1 &= 0; \end{aligned} \right. \\
 (21) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \xi_2 &= 0, \\ \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \eta_2 &= 0, \\ \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} + f \frac{m_0 + m_2}{r_2^3} \zeta_2 &= 0, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

qui nous donne deux mouvements elliptiques.

Nous prenons pour éléments elliptiques, dans le premier de ces mouvements, les six quantités $L_1, G_1, H_1; l_1, g_1, h_1$, liées, comme il suit, aux éléments des astronomes :

$$(22) \quad \begin{cases} L_1 = \sqrt{f(m_0 + m_1) a_1}, \\ G_1 = \sqrt{f(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)}, \\ H_1 = \sqrt{f(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} \cos i_1, \\ l_1 = n_1(t + c_1) = \text{l'anomalie moyenne,} \\ g_1 = \pi_1 - \Omega = \text{la distance du périhélie au nœud,} \\ h_1 = \Omega_1 = \text{la longitude du nœud.} \end{cases}$$

Nous introduirons de même les quantités correspondantes pour Saturne $L_2, G_2, H_2; l_2, g_2, h_2$.

Faisons, pour abrégér,

$$\frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} = K_1, \quad \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_2(m_0 + m_1)} = K_2,$$

et nous aurons les équations suivantes pour déterminer en fonction du temps les douze variables L_1, G_1, H_1, \dots ,

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{dL_1}{dt} = K_1 \frac{dV}{dl_1}, & \frac{dl_1}{dt} = n_1 - K_1 \frac{dV}{dL_1}, \\ \frac{dG_1}{dt} = K_1 \frac{dV}{dg_1}, & \frac{dg_1}{dt} = -K_1 \frac{dV}{dG_1}, \\ \frac{dH_1}{dt} = K_1 \frac{dV}{dh_1}, & \frac{dh_1}{dt} = -K_1 \frac{dV}{dH_1}; \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dL_2}{dt} = K_2 \frac{dV}{dl_2}, & \frac{dl_2}{dt} = n_2 - K_2 \frac{dV}{dL_2}, \\ \frac{dG_2}{dt} = K_2 \frac{dV}{dg_2}, & \frac{dg_2}{dt} = -K_2 \frac{dV}{dG_2}, \\ \frac{dH_2}{dt} = K_2 \frac{dV}{dh_2}, & \frac{dh_2}{dt} = -K_2 \frac{dV}{dH_2}. \end{cases}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} V &= V' - \frac{fm_0 m_1}{2a_1} - \frac{fm_0 m_2}{2a_2}, \\ L_1 &= K_1 L'_1, \quad L_2 = K_2 L'_2, \\ G_1 &= K_1 G'_1, \quad G_2 = K_2 G'_2, \\ H_1 &= K_1 H'_1, \quad H_2 = K_2 H'_2, \end{aligned}$$

nous aurons les équations transformées, toutes sous la forme dite cano-
nique, savoir :

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dL'_1}{dt} = \frac{dV'}{dl_1}, & \frac{dl_1}{dt} = -\frac{dV'}{dL'_1}, \\ \frac{dG'_1}{dt} = \frac{dV'}{dg_1}, & \frac{dg_1}{dt} = -\frac{dV'}{dG'_1}, \\ \frac{dH'_1}{dt} = \frac{dV'}{dh_1}, & \frac{dh_1}{dt} = -\frac{dV'}{dH'_1}; \end{cases}$$

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dL'_2}{dt} = \frac{dV'}{dl_2}, & \frac{dl_2}{dt} = -\frac{dV'}{dL'_2}, \\ \frac{dG'_2}{dt} = \frac{dV'}{dg_2}, & \frac{dg_2}{dt} = -\frac{dV'}{dG'_2}, \\ \frac{dH'_2}{dt} = \frac{dV'}{dh_2}, & \frac{dh_2}{dt} = -\frac{dV'}{dH'_2}. \end{cases}$$

Dès lors on peut suivre, pour l'intégration de ces équations, la méthode
que j'ai indiquée dans ma thèse; V' est de la forme

$$V' = A + \Sigma B \cos(\alpha_1 l_1 + \beta_1 g_1 + \gamma_1 h_1 + \alpha_2 l_2 + \beta_2 g_2 + \gamma_2 h_2),$$

où $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont des nombres entiers, A et B des fonctions
des six variables $L'_1, G'_1, H'_1; L'_2, G'_2, H'_2$.

En réduisant V' à la partie non périodique augmentée d'un terme
périodique, on peut intégrer rigoureusement les équations (25) et (26),
et il arrive que, quand on fait varier les constantes introduites par l'in-
tégration, on a des équations toutes pareilles à (25) et (26), seulement
le terme périodique considéré a disparu. Par une série d'intégrations
rigoureuses, on arrivera donc à épuiser les termes les plus importants
de V' .

On arrivera donc ainsi à obtenir les expressions de $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$
en fonction du temps et de douze constantes arbitraires. D'après les
formules (12), les coordonnées de Saturne, rapportées au Soleil, seront

$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1,$$

$$y_2 - y_0 = \eta_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \eta_1,$$

$$z_2 - z_0 = \zeta_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \zeta_1.$$

Je crois utile de dire quelques mots de l'application du principe des aires au problème actuel. Ce principe, qui s'applique aux mouvements du Soleil et de nos deux planètes, rapportés aux axes ox, oy, oz , nous donne l'équation

$$m_0 \left(y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt} \right) + m_1 \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right) + m_2 \left(y_2 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dy_2}{dt} \right) = \text{const.}$$

et deux autres équations pareilles, que l'on obtient en permutant les lettres x, y, z .

Or si, dans le premier membre de cette équation, on substitue les expressions des coordonnées $x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, fournies par les équations (6), on arrive aisément à l'équation suivante :

$$\mu_1 \left(\eta_1 \frac{d\zeta_1}{dt} - \zeta_1 \frac{d\eta_1}{dt} \right) + \mu_2 \left(\eta_2 \frac{d\zeta_2}{dt} - \zeta_2 \frac{d\eta_2}{dt} \right) = \text{const.}$$

et deux autres équations pareilles; remarquons que

$$\eta_1 \frac{d\zeta_1}{dt} - \zeta_1 \frac{d\eta_1}{dt} = \sqrt{f(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} \sin i, \sin \Omega_1,$$

$$\zeta_1 \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1 \frac{d\zeta_1}{dt} = -\sqrt{f(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} \sin i, \cos \Omega_1,$$

$$\zeta_1 \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1 \frac{d\zeta_1}{dt} = +\sqrt{f(m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} \cos i,$$

et nous trouverons aisément que, en nommant A, B, C trois constantes, le principe des aires nous donnera les trois relations

$$(27) \quad \begin{cases} H'_1 + H'_2 = A, \\ \sqrt{G'^2 - H'_1{}^2} \sin h_1 + \sqrt{G'^2 - H'_2{}^2} \sin h_2 = B, \\ \sqrt{G'^2 - H'_1{}^2} \cos h_1 + \sqrt{G'^2 - H'_2{}^2} \cos h_2 = C. \end{cases}$$

Voilà donc, entre six de nos douze variables, trois relations tout à fait rigoureuses, qui ne peuvent manquer d'être d'un grand secours dans la méthode d'approximation que j'ai en vue.

Quand on rapporte les mouvements de Jupiter et de Saturne au Soleil, dans la théorie des inégalités séculaires, on rencontre les trois équations (27), mais elles ne sont pas rigoureuses. On voit donc que, à plusieurs égards, il y a un grand avantage à partir, pour la résolution par approximation du problème des trois corps, des équations symétriques (17) et (18).



MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES COORDONNÉES CURVILIGNES

ET
DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX,

PAR M. G. DARBOUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

TROISIÈME PARTIE.

§ XII. — *Extension de la méthode de Lamé aux systèmes orthogonaux à n variables et conséquences nouvelles de cette méthode.*

Dans le travail inséré au tome III de ce Recueil, nous avons étudié la méthode que Lamé a fait connaître dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* pour la recherche et l'étude des systèmes orthogonaux. Cette méthode nous a conduit à des résultats nouveaux qui ont été consignés soit dans notre travail primitif, soit dans des Notes insérées aux tomes LXVII, LXVIII, LXIX des *Comptes rendus*. Nous nous proposons de reprendre ici cette recherche en l'étendant au cas de n variables et en étudiant d'une manière plus complète les propriétés de chaque groupe d'équations. Il est vrai que, depuis la publication des résultats de nos premières études au tome LXIX des *Comptes rendus*, l'étude des formes quadratiques à n différentielles a fait l'objet de beaux Mémoires de MM. Lipschitz et Christoffel. Mais nous croyons qu'il y a encore intérêt à étudier par une méthode spéciale la question moins générale des systèmes orthogonaux, d'autant plus que, dans ce cas, on peut em-

ployer des procédés de calcul qui ne trouvent pas place dans le développement de la théorie générale. Nous indiquerons la méthode qui nous a conduit aux propositions énoncées dans la Note du 9 août 1869, où nous avons montré comment, de la connaissance d'un système orthogonal à n variables, tel que celui des coordonnées elliptiques, on pouvait déduire celle d'un nombre illimité de systèmes orthogonaux à trois variables.

Considérons n fonctions $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de n variables x_1, \dots, x_n formant un système orthogonal, c'est-à-dire telles que l'on ait les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(1) \quad \delta_{\rho_i} \rho_k = 0.$$

Il suit de là que, si l'on pose

$$(2) \quad H_i^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_n}\right)^2},$$

les n^2 quantités $H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k}$ formeront les coefficients d'une substitution orthogonale, et si l'on considère les équations

$$d\rho_k = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} dx_n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ces équations, résolues par rapport à dx_1, \dots, dx_n , nous donneront

$$dx_i = H_i^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} d\rho_1 + \dots + H_i^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} d\rho_k + \dots + H_i^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} d\rho_n.$$

De ces formules on déduit les équations bien connues de Lamé

$$(3) \quad \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}.$$

Nous poserons

$$(4) \quad X_k^i = \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}.$$

Les n^2 quantités X_k^i seront les coefficients d'une substitution orthogo-

nale. On aura

$$\begin{aligned} dx_1^2 + \dots + dx_n^2 &= H_1^2 d\rho_1^2 + \dots + H_n^2 d\rho_n^2, \\ dx_i &= X_1^i H_1 d\rho_1 + X_2^i H_2 d\rho_2 + \dots + X_n^i H_n d\rho_n, \\ X_1^i + \dots + X_n^i &= 1, \\ X_1^i X_1^k + \dots + X_n^i X_n^k &= 0. \end{aligned}$$

Adoptant toutes les notations de Lamé, nous conviendrons de désigner par u l'une quelconque des variables x_1, \dots, x_n et de poser, quand on la considérera seule,

$$(5) \quad U_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial u}.$$

Les sommes désignées par la lettre S seront obtenues en remplaçant u successivement par x_1, x_2, \dots, x_n . Dans le cas de trois variables, U_1, U_2, U_3 sont les cosinus des angles que font les normales aux trois surfaces avec l'axe des u .

De la formule (3) il résulte que l'opération que nous avons appelée ∂_{ρ_i} , et qui est définie par l'équation

$$\partial_{\rho_i} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_n},$$

peut s'écrire

$$\partial_{\rho_i} v = \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} \right),$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad \partial_{\rho_i} v = \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial v}{\partial \rho_i}.$$

Par exemple, si l'on différentie l'équation

$$\partial_{\rho_k} \rho_k = 0,$$

on aura

$$\partial_{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) + \partial_{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0,$$

ou, en tenant compte de la formule (6),

$$(7) \quad \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) + \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0.$$

Cela posé, reprenons la formule qui sert de définition aux U ,

$$(8) \quad du = H_1 U_1 d\rho_1 + \dots + H_n U_n d\rho_n,$$

et écrivons les conditions d'intégrabilité. On doit avoir

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} = H_k \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} + U_k \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} = H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial \rho_k} + U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k}.$$

Écrivons de même la formule (7); après y avoir remplacé $\frac{\partial \rho_k}{\partial u}$, $\frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u}$ par

$\frac{1}{H_k} U_k$, $\frac{1}{H_{k'}} U_{k'}$, nous aurons

$$(10) \quad H_k \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} - U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} + H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial \rho_k} - U_k \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} = 0,$$

et si nous comparons les formules (9) et (10), nous en déduisons

$$\frac{1}{U_{k'}} \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k}, \quad \frac{1}{U_k} \frac{\partial U_{k'}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}}.$$

Ces formules rentrent dans le même type. Si, au lieu de garder, comme Lamé, H_k , $H_{k'}$, nous introduisons les variables auxiliaires

$$(11) \quad \beta_{kk'} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k}, \quad k \lesssim k',$$

elles prennent la forme

$$(12) \quad \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{kk'} U_{k'}, \quad k \lesssim k'.$$

Pour donner plus de netteté aux sommes que nous avons à considérer, nous poserons par définition

$$(13) \quad \beta_{kk} = 0,$$

en sorte que $\beta_{kk'}$ sera défini par la formule (11) si k est différent de k' , et par la formule (13) si $k = k'$.

La formule (12) ne nous donne pas toutes les dérivées des fonctions U . Nous aurons celle qui nous manque en différentiant par rapport à ρ_k l'équation

$$(14) \quad U_1^2 + \dots + U_n^2 = 1,$$

ce qui nous donne

$$(15) \quad \frac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{.k} U_1 - \beta_{.k} U_2 - \dots - \beta_{.k} U_n.$$

Ainsi les formules (12) et (15) font connaître toutes les dérivées des fonctions U_k .

Ce point étant obtenu, nous aurons des relations entre les fonctions β en exprimant que les différentes valeurs obtenues pour une même dérivée seconde de U_k sont égales. On aura, par exemple,

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} = \frac{\partial \beta_{.k'}}{\partial \rho_{k'}} U_k + \beta_{.k'} \beta_{k'.k} U_{k'} = \frac{\partial \beta_{k'.k}}{\partial \rho_{k'}} U_{k'} + \beta_{k'.k} \beta_{k'.k} U_k.$$

Cette équation devant avoir lieu pour n systèmes de valeurs des U , on en déduit

$$(16) \quad \frac{\partial \beta_{k'.k}}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{k'.k} \beta_{k'.k}, \quad k \leq k' \leq k''.$$

Cherchons de même les deux valeurs que l'on peut obtenir pour $\frac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}}$, et égalons-les; on trouve

$$U_{k'} \frac{\partial \beta_{.k'}}{\partial \rho_k} = -U_k \left(\frac{\partial \beta_{k'.k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{.k} \beta_{.k'} + \beta_{.k} \beta_{.k'} + \dots + \beta_{.k} \beta_{.k'} \right),$$

et par suite

$$(17) \quad \frac{\partial \beta_{.k'}}{\partial \rho_k} + \frac{\partial \beta_{k'.k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{.k} \beta_{.k'} + \beta_{.k} \beta_{.k'} + \dots + \beta_{.k} \beta_{.k'} = 0, \quad k \leq k'.$$

Les quantités β doivent donc satisfaire aux deux groupes bien distincts de formules (16), (17). Puis les U seront déterminés par les équations

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{k'.k} U_{k'}, \\ \frac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{.k} U_1 - \dots - \beta_{.k} U_n, \end{cases}$$

qui seront évidemment compatibles si les équations (16), (17) sont satisfaites.

Supposons que l'on ait trouvé des fonctions β satisfaisant aux équations (16) et (17). Je dis que l'on pourra toujours en déduire une infinité de systèmes orthogonaux. En effet, les conditions d'intégrabilité

étant satisfaites, le système (18) déterminera les fonctions U , et il est facile de voir avec quel degré de généralité. Les valeurs initiales seules de ces fonctions peuvent être choisies, puisque les équations déterminent toutes leurs dérivées premières.

Or il résulte des équations différentielles (18) que, si l'on a trouvé deux systèmes de solutions U_i, V_i de ces équations, la fonction

$$U_1 V_1 + \dots + U_n V_n$$

demeure constante. Il suffit de prendre une de ses dérivées, d'y substituer les valeurs de $\frac{\partial U_i}{\partial \rho_k}, \dots, \frac{\partial V_i}{\partial \rho_k}$, déduites de ces équations; on obtiendra un résultat nul. Cette remarque s'applique évidemment au cas où les deux systèmes coïncident. On a donc

$$\begin{aligned} U_1 V_1 + \dots + U_n V_n &= \text{const.}, \\ U_1^2 + \dots + U_n^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Si donc on a pris les valeurs initiales des fonctions de telle manière que l'on ait

$$\begin{aligned} U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 &= 1, \\ U_1 V_1 + \dots + U_n V_n &= 0, \end{aligned}$$

ces relations subsisteront toujours. Il n'y a donc au fond qu'un système de solutions pour les U_i ; les autres s'en déduiront par des transformations linéaires orthogonales à coefficients constants (par un changement d'axes dans le cas de $n = 3$).

Il n'en est pas de même pour les équations (11),

$$H_k \beta_{ik} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial \rho_k},$$

qui déterminent les H quand les β sont connus. A la vérité, ces équations sont compatibles en vertu des équations (16). Mais elles ne déterminent pas les dérivées $\frac{\partial H_k}{\partial \rho_k}$, et, différenciées, elles ne donneront pas $\frac{\partial^2 H_k}{\partial \rho_k^2}$. Elles admettront donc une solution avec n fonctions arbitraires d'une seule variable indépendante.

Il suit de là que, si l'on connaît un système orthogonal, on pourra d'abord former les valeurs des fonctions β qui satisferont nécessaire-

ment aux équations (16), (17). Si, supposant ensuite ces quantités β données, on veut en déduire tous les systèmes qui y correspondent. les U, à la vérité, seront complètement déterminés; ils seront les mêmes que pour le système proposé, mais les fonctions H pourront recevoir de nouvelles valeurs. Cette remarque, que j'ai développée au tome LVII des *Comptes rendus*, avait déjà été faite, pour le cas de $n = 3$, par M. Combesure, dans un Mémoire inséré au tome IV de ce Recueil (1^{re} série).

Dans ce cas, l'interprétation géométrique est bien simple : si l'on considère l'un quelconque des systèmes orthogonaux ainsi déduits du proposé, les normales aux trois surfaces de chaque système aux points correspondants seront parallèles, les surfaces correspondantes auront une même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

On le voit, dans notre méthode, la recherche du système orthogonal repose sur trois opérations distinctes : d'abord l'intégration des équations aux fonctions β , puis celle du système aux fonctions H, enfin celle du système qui détermine les U. Cela fait, l'intégration des expressions

$$du = H_1 U_1 d\rho_1 + \dots + H_n U_n d\rho_n$$

donnera les fonctions x_1, \dots, x_n , et la solution du problème sera achevée.

Il importe de remarquer que l'on pourrait, dans le système aux fonctions β , remplacer ces fonctions par les expressions en H_k , qui leur servent de définition. Il est facile de voir qu'alors les deux équations

$$\frac{\partial \beta_{kl'}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{kl''} \beta_{k''l'}, \quad \frac{\partial \beta_{k'l'}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{k'l''} \beta_{k''l'}$$

donneraient une seule équation pour les fonctions H.

Il y a très-souvent avantage à former les équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions x_1, \dots, x_n . Il suffit, pour les obtenir, de substituer, dans les équations (18), aux β et U, leurs expressions, ce qui donne

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_{k'}} = 0. \\ \frac{1}{H_k} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k^2} - \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} + \frac{\beta_{1k}}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\beta_{2k}}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \rho_2} + \dots + \frac{\beta_{nk}}{H_n} \frac{\partial u}{\partial \rho_n} = 0. \end{cases}$$

Mentionnons encore l'équation

$$\frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{H_n^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_n} \right)^2 = 1,$$

qui pourra servir à trouver u .

§ XIII. — *Première application à un exemple simple de la méthode précédente.*

Pour montrer, au moins par un exemple, la marche des calculs, traitons le cas où l'on veut que toutes les quantités H_i soient égales, et posons

$$H_i = \frac{1}{h};$$

on aura

$$(20) \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = \frac{1}{h^2} (d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2).$$

On connaît déjà une solution de cette équation, celle qui est fondée sur les formules généralisées de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

On aura ici

$$\beta_{ik} = -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_k},$$

et les équations (16) nous donneront

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k \partial \rho_k} = 0,$$

ce qui exige que h soit de la forme

$$h = r_1 + r_2 + \dots + r_n,$$

la fonction r_i dépendant de la seule variable ρ_i . En substituant les valeurs des β dans le groupe (17), on trouve

$$(21) \quad h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_n} \right)^2.$$

Le second membre étant toujours le même, il faut donc que toutes les dérivées $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_i^2}$ soient égales, ce qui donne

$$r_1'' = r_2'' = \dots = r_n'' = 2a,$$

a ne pouvant être qu'une constante, et par suite on aura

$$(22) \quad h = a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2) + 2a_1\rho_1 + \dots + 2a_n\rho_n + b.$$

En exprimant que la relation (21) est satisfaite, on obtient

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = ab,$$

unique relation à laquelle doivent satisfaire les constantes a, b, a_i .

Examinons d'abord le cas où toutes les constantes sont nulles, sauf b , que l'on prendra égal à l'unité. Alors toutes les fonctions β sont nulles. Les quantités U sont constantes, et l'on voit que la solution la plus générale de l'équation

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2$$

s'obtient en prenant pour les x_i des fonctions linéaires des ρ_i .

Il suit de là que, si deux systèmes orthogonaux donnent la même expression pour

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

ils ne diffèrent pas essentiellement, et l'on passe de l'un à l'autre par une substitution orthogonale à coefficients constants, ou, pour le cas de $n = 3$, par un changement d'axes coordonnés.

Cette remarque peut dès à présent recevoir son application, et nous dispense des calculs relatifs à l'expression la plus générale de h . Nous savons que, dans ce cas, on a une solution de l'équation (20) où l'on a substitué la valeur de h ,

$$h = a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2) + 2a_1\rho_1 + \dots + 2a_n\rho_n + b,$$

en prenant

$$x_1 = \frac{\rho_1 + \frac{a_1}{a}}{h}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\rho_n + \frac{a_n}{a}}{h}.$$

On aura donc la solution la plus générale en effectuant une substitution linéaire orthogonale que nous pouvons négliger. En particulier, dans le cas de $n = 3$, on aura la solution la plus générale de l'équa-

tion (20) en opérant une transformation par rayons vecteurs réciproques et la faisant suivre d'un déplacement.

Il y a un cas spécial de la transformation précédente que l'on néglige d'habitude, parce qu'il ne peut se rapporter qu'à des points imaginaires, mais dont il nous paraît bon de dire quelques mots: c'est celui où l'on a

$$a = 0,$$

et où l'expression de h devient

$$h = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \dots + a_n\rho_n + b,$$

avec la condition

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0.$$

Cette dernière condition exige que l'une au moins des constantes soit imaginaire. M. Cremona, croyons-nous, a, le premier, appelé l'attention sur ce cas spécial de l'inversion. Les formules qui s'y rapportent ne se déduisent pas immédiatement de celles qui sont relatives au cas général; mais on les trouve sans difficulté.

Supposons que, par une substitution linéaire, on ait réduit h à la forme

$$h = \rho_1 + i\rho_2,$$

on pourra prendre

$$x_1 = \frac{a(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2) - \frac{1}{a}}{2h},$$

$$x_2 = \frac{ai(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2) - \frac{i}{a}}{2h}.$$

et, pour les autres fonctions x ,

$$x_k = \frac{\rho_k}{\rho_1 + i\rho_2}.$$

Les résultats précédents donnent lieu à une remarque importante et qui nous sera très-utile dans la suite. Supposons que, considérant le cas de $n = 3$, on ait trouvé un système orthogonal défini par la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

et que l'on cherche s'il en existe un autre pour lequel

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds'^2 = \frac{1}{M^2} ds^2 = \frac{1}{M^2} (H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2).$$

On devra avoir, d'après ce qui précède,

$$M = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2hz + f,$$

a, b, c, f étant liés par la relation

$$b^2 + c^2 + h^2 - af = 0.$$

Si donc on cherche en fonction des ρ, ρ_1, ρ_2 l'expression la plus générale de M , cette expression se présentera nécessairement sous la forme

$$M = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 + a_5 M_5,$$

où les cinq constantes a_i seront liées par une équation du second degré

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_5) = 0.$$

Supposons que, par une substitution linéaire opérée sur les constantes, on ait ramené cette relation à la forme

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4 a_5 = 0.$$

Il résulte de l'expression générale de M que l'on aura un système orthogonal pour lequel

$$ds^2 = \frac{1}{M_1^2} (H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2),$$

et

$$2x = \frac{M_2}{M_1}, \quad 2y = \frac{M_3}{M_1}, \quad 2z = \frac{M_4}{M_1}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{M_5}{M_1};$$

en sorte que la détermination de l'unique fonction M fera connaître celle de x, y, z , et même celle de $x^2 + y^2 + z^2$.

Revenons aux systèmes précédemment considérés, ceux qui se rapportent à l'expression (22) de M . Sous leur forme la simple, les formules trouvées sont les suivantes :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_i = \frac{1}{h}, & h = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2, \\ x_i = \frac{\rho_i}{h}, & \beta_{ij} = -\frac{\rho_i \rho_j}{h}, \\ X_i^i = 1 - \frac{2\rho_i^2}{h}, & X_k^i = -\frac{2\rho_i \rho_k}{h}. \end{array} \right.$$

Cela étant, si nous appliquons la remarque déjà faite, et si nous cherchons le système orthogonal le plus général pour lequel les β et les X_k^i demeurent les mêmes, nous aurons à déterminer les fonctions H par les équations

$$\beta_{ik'} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k},$$

ce qui se fait sans difficulté. Je n'insiste pas sur cette recherche, dont j'indique seulement les résultats. On trouve

$$(24) \quad H_i = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2} - \frac{1}{2} R_i',$$

R_1, \dots, R_n désignant des fonctions de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ respectivement et R_i' la dérivée de R_i .

Puis les variables x_i s'obtiennent par l'intégration des expressions

$$H_1 U_1 d\rho_1 + \dots + H_n U_n d\rho_n,$$

et l'on trouvera

$$(25) \quad x_i = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2} \rho_i - \frac{1}{2} \int \frac{R_i' d\rho_i}{\rho_i}.$$

C'est un système orthogonal contenant n fonctions arbitraires d'une seule variable. Pour le cas de $n = 3$, il a déjà été donné dans le travail antérieur déjà cité.

§ XIV. — *Remarques sur le premier système d'équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions β .*

Nous avons vu, dans l'exposé de la méthode de recherche des systèmes orthogonaux, que les fonctions β doivent satisfaire à deux groupes bien distincts d'équations. Il m'a paru intéressant de rechercher la signification du premier de ces deux systèmes considéré isolément. Je vais montrer qu'il se rattache à la recherche des conditions d'intégrabilité d'un système particulier d'équations aux dérivées partielles, système que l'on rencontre dans un grand nombre de recherches.

Considérons les équations

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = \alpha_k^i \frac{\partial u}{\partial \rho_k} + \alpha_i^k \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + \gamma_{ik} u,$$

où i et k sont différents et peuvent prendre toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$, et cherchons les conditions non-seulement pour qu'il y ait une fonction satisfaisant à ces équations, mais pour qu'il y en ait $n + 1$. En d'autres termes, exprimons que ces équations admettent une intégrale contenant assez de constantes pour qu'on puisse donner à la fonction et à ses dérivées premières des valeurs quelconques pour un système donné de valeurs des variables indépendantes ρ_i .

Pour obtenir ces conditions, nous formerons de trois manières différentes les valeurs des dérivées troisièmes $\frac{\partial^3 u}{\partial \rho_i \partial \rho_\mu \partial \rho_{\nu}}$, et nous écrirons que ces valeurs sont égales. On trouve, par exemple, en prenant la dérivée de l'équation (26) par rapport à $\rho_{k'}$, et en substituant les valeurs des dérivées secondes qu'introduit cette opération,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho_i \partial \rho_{i'} \partial \rho_\mu} &= \frac{\partial u}{\partial \rho_i} \left(\alpha_i^k \alpha_i^{k'} + \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial \rho_\mu} \right) + \frac{\partial u}{\partial \rho_k} \left(\alpha_k^i \alpha_k^{i'} + \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial \rho_\mu} \right) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial \rho_{\mu'}} \left(\alpha_k^i \alpha_k^{i'} + \alpha_i^k \alpha_i^{k'} + \gamma_{ik} \right) + u \left(\alpha_k^i \gamma_{ik\mu'} + \alpha_i^k \gamma_{ik\mu'} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \rho_{\mu'}} \right). \end{aligned}$$

Il faudra, par exemple, qu'en permutant les indices i et k' on retrouve la même valeur, et, comme la fonction et ses dérivées premières doivent pouvoir être prises arbitrairement, par hypothèse, il faudra d'abord que les coefficients des mêmes dérivées soient égaux. Cela nous donne des équations du type suivant :

$$(27) \quad \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial \rho_{\mu'}} = \alpha_k^i \alpha_i^{k'} + \alpha_k^{i'} \alpha_i^k - \alpha_i^k \alpha_i^{k'} + \gamma_{ik\mu'}.$$

Or cette équation montre que l'on doit avoir

$$\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial \rho_{\mu'}} = \frac{\partial \alpha_i^{k'}}{\partial \rho_k},$$

et par conséquent $\alpha_i^k, \alpha_i^{k'}$ sont les dérivées d'une même fonction qu'on peut écrire $\log H_i$, et l'on a

$$\alpha_i^k = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}.$$

Les équations proposées (26) prennent alors la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \gamma_{ik} u = 0.$$

Les formules (27), exprimées en introduisant les fonctions H_i , deviennent

$$(28) \quad \gamma_{ik} = \frac{H_k}{H_i} \left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \rho_k} - \beta_{ik} \beta_{ki} \right),$$

en posant, comme nous l'avons déjà fait, pour définition des β ,

$$\beta_{i\eta} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_\eta}{\partial \rho_i}.$$

Enfin, si nous exprimons que, dans les expressions des troisièmes dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k \partial \rho_l}$, les coefficients de u ont la même valeur pour les trois expressions d'une même dérivée, il faudra joindre aux formules (28) les suivantes :

$$(29) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_k} (\gamma_{ik} + \beta_{ik} \beta_{ki}) = \frac{\partial}{\partial \rho_k} (\gamma_{ik} + \beta_{ik} \beta_{ki}),$$

qui, en y substituant les valeurs de γ , γ' déduites des formules (28), donneraient les équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions H_i .

Examinons le cas particulier où les équations proposées ne contiennent pas de terme en u . Nous savons déjà qu'elles seront de la forme

$$(30) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} = 0.$$

En outre, les fonctions β devront satisfaire aux équations

$$(31) \quad \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} \beta_{ki},$$

déduites des formules (28), où l'on a fait $\gamma_{kk} = 0$. Quant aux équations (29), elles seront satisfaites d'elles-mêmes. Donc, le groupe (31), qui est le premier de ceux que l'on rencontre dans la théorie des systèmes orthogonaux, exprime précisément les conditions d'intégrabilité d'un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = a_k^i \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + a_i^k \frac{\partial u}{\partial \rho_k}.$$

Nous voyons qu'un tel système, s'il admet une solution avec n con-

stantes permettant de choisir arbitrairement les valeurs initiales des n dérivées, ou, si l'on veut, s'il admet n solutions distinctes, doit pouvoir être ramené à la forme (30), où les fonctions H_i vérifient les équations (31). Du reste, ces équations (31), qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes, et, toutes les fois qu'elles seront vérifiées, les équations précédentes admettront une solution plus générale que celle qu'on cherchait, et, contenant n fonctions arbitraires d'une seule variable. Il suffit, pour le reconnaître, de remarquer que les équations obtenues en différentiant jusqu'à un ordre quelconque détermineront toutes les dérivées, moins celles qui sont prises par rapport à une seule variable.

Examinons maintenant les conséquences géométriques des remarques précédentes, et, pour plus de netteté, bornons-nous au cas de trois variables. Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les trois variables indépendantes, la variable ρ étant supposée affectée de l'indice 0, et admettons que le système (31) soit vérifié par trois fonctions H, H_1, H_2 de ρ, ρ_1, ρ_2 . Ce système est alors formé de six équations se réduisant à trois, qui sont celles du premier système de Lamé.

Les équations

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial \rho_2} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 \end{cases}$$

admettront alors une solution avec trois fonctions arbitraires d'une variable. Soient x, y, z trois solutions distinctes de ces équations, et regardons ces variables comme les coordonnées d'un point. Nous formons ainsi un système de coordonnées curvilignes. Je dis qu'il jouit de la propriété que les surfaces des différentes familles s'y coupent suivant des lignes conjuguées.

En effet, considérons l'une quelconque des surfaces du système, la surface $\rho_2 = \text{const.}$, par exemple. Si l'on pose, suivant l'usage,

$$dz = p dx + q dy,$$

on aura d'abord

$$(33) \quad \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = p \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + q \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = p \frac{\partial x}{\partial \rho} + q \frac{\partial y}{\partial \rho}.$$

Si l'on veut que les lignes $\rho = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$ soient conjuguées, on devra avoir

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} = 0,$$

ou, ce qui est identique,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \rho_1} - p \frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} - q \frac{\partial^2 y}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

La comparaison de ces équations avec les formules (33) nous montre qu'il est possible de trouver deux fonctions a et b , telles que l'on ait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} = a \frac{\partial u}{\partial \rho} + b \frac{\partial u}{\partial \rho_1},$$

lorsqu'on y remplace u successivement par x, y, z . En raisonnant de même pour les deux autres surfaces, on obtiendra des équations

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} = a \frac{\partial u}{\partial \rho} + b \frac{\partial u}{\partial \rho_1}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_2} = a_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = a_2 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \end{array} \right.$$

qui, devant être satisfaites par trois fonctions x, y, z , se ramènent nécessairement à la forme (32).

Ainsi nous obtenons la signification du premier système de Lamé. Si l'on a trouvé trois fonctions H, H_1, H_2 satisfaisant aux équations

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} = \beta_{02} \beta_{21}, \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho} = \beta_{10} \beta_{02}, \quad \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} = \beta_{21} \beta_{10}, \\ \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} = \beta_{12} \beta_{20}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho} = \beta_{20} \beta_{01}, \quad \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} = \beta_{01} \beta_{12}, \end{array} \right.$$

qui se réduisent à trois, lorsqu'on y remplace les β par leurs expressions, on obtiendra, en intégrant les équations (32), non pas un système né-

cessairement orthogonal, mais un système de coordonnées curvilignes dans lequel les surfaces se couperont suivant des lignes conjuguées. Ces lignes conjuguées pourront être les lignes de courbure, et alors le système sera orthogonal, mais elles en différeront en général.

Ces systèmes particuliers, formés de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées, ont une propriété qui les distingue de tous les autres systèmes de coordonnées curvilignes, et que nous allons faire connaître.

Étant donné un système de coordonnées curvilignes, cherchons s'il en existe un autre tel qu'on puisse établir la correspondance entre les deux systèmes, de manière que, aux points correspondants, les plans tangents aux trois surfaces soient parallèles dans les deux systèmes. En d'autres termes, x, y, z étant des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , cherchons s'il existe trois fonctions $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, telles que les expressions

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2, \\ & \lambda \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \dots, \\ & \lambda \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \dots \end{aligned}$$

soient des différentielles exactes. Il est clair, en effet, que, si cette condition est satisfaite et si x_1, y_1, z_1 sont les intégrales des différentielles précédentes, x_1, y_1, z_1 , considérées comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , définiront un système de coordonnées curvilignes jouissant de la propriété indiquée. Or les conditions d'intégrabilité des expressions précédentes nous conduisent immédiatement à un système de la forme (34), ce que démontre le théorème suivant :

Pour que deux systèmes de coordonnées curvilignes puissent se correspondre de telle manière qu'aux points correspondants les plans tangents aux trois surfaces aient la même direction dans les deux systèmes, il est nécessaire que les surfaces de chaque système se coupent mutuellement suivant des systèmes de lignes conjuguées sur chacune de ces surfaces.

Nous allons voir, du reste, que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante. Supposons, en effet, qu'on ait trouvé six fonc-

tions β satisfaisant aux équations (35), les fonctions H seront définies par les équations

$$(36) \quad \beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial \rho_i}.$$

Quant aux coordonnées x, y, z , au lieu de les déterminer directement, posons

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = H_i U_i,$$

u désignant l'une quelconque d'entre elles, les équations (32) prendront la forme

$$(37) \quad \frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} U_k.$$

De cette manière, le calcul des coordonnées u sera ramené à deux problèmes distincts, au calcul des fonctions H par les formules (36), et à celui des fonctions U par les formules (37). Si, gardant les mêmes valeurs de U, U_1, U_2 , on prend différentes valeurs des H satisfaisant aux équations (36), on aura deux systèmes de coordonnées curvilignes à plans tangents parallèles aux points correspondants. Du reste, les systèmes (36), (37) sont toujours intégrables, chacun avec trois fonctions arbitraires, les conditions d'intégrabilité étant remplies en vertu des équations auxquelles satisfont les β . On obtiendra ainsi, avec six fonctions arbitraires d'une variable, des systèmes triples de surfaces à lignes conjuguées.

Tout ce qui précède peut être résumé dans les théorèmes suivants :

Le premier système (35) de Lamé exprime que les surfaces du système triple se coupent suivant des lignes conjuguées; toutes les fois qu'on aura trouvé les fonctions β satisfaisant à ce système, la suite des calculs donnera un système de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées avec six fonctions arbitraires d'une variable.

Si deux systèmes de coordonnées curvilignes se correspondent de telle manière qu'aux points homologues les plans tangents aux trois surfaces soient parallèles dans les deux systèmes, les surfaces de chaque système se coupent suivant des lignes conjuguées.

Réciproquement, si trois familles de surfaces se coupent suivant des lignes conjuguées, il existera d'autres systèmes de coordonnées curvilignes

avec trois fonctions arbitraires, tels qu'aux points correspondants dans les deux systèmes les plans tangents aux surfaces correspondantes soient parallèles.

Les propriétés précédentes sont donc caractéristiques des systèmes que nous étudions ici pour la première fois.

§ XV. — *Étude de quelques systèmes triples de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées.*

L'emploi des systèmes orthogonaux est soumis à de telles restrictions que l'on sera nécessairement conduit, en Physique mathématique, à adopter des systèmes de coordonnées curvilignes obliques. Le groupe particulier que nous avons signalé au paragraphe précédent est évidemment le plus simple après celui des systèmes orthogonaux. Nous croyons donc utile de faire connaître quelques systèmes simples de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées.

Si, dans le système (32), nous faisons $H = H_1 = H_2$, nous avons vu que l'on doit avoir

$$H = \frac{1}{r + r_1 + r_2},$$

r, r_1, r_2 désignant des fonctions de ρ , de ρ_1 , et de ρ_2 . Cette hypothèse nous conduit au système suivant :

$$x = \frac{s + s_1 + s_2}{r + r_1 + r_2}, \quad y = \frac{t + t_1 + t_2}{r + r_1 + r_2}, \quad z = \frac{u + u_1 + u_2}{r + r_1 + r_2},$$

où s_i, t_i, u_i dépendent seulement de la variable de même indice.

Déterminons, dans le système (32), les quantités H, H_1, H_2 , par la condition que ce système admette pour solutions des produits de trois fonctions dépendant l'une de ρ , l'autre de ρ_1 , la troisième de ρ_2 . Nous obtiendrons la forme

$$(38) \quad \begin{cases} (r - r_1) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \frac{\partial u}{\partial \rho}, \\ (r_1 - r_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \frac{\partial u}{\partial \rho_2} - \frac{\partial u}{\partial \rho_1}, \\ (r_2 - r) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \end{cases}$$

où r, r_1, r_2 désignent des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 respectivement, et qui conduit à une infinité de solutions de la forme

$$u = e^{\int \frac{d\rho}{r+h} + \int \frac{d\rho_1}{r_1+h} + \int \frac{d\rho_2}{r_2+h}},$$

h désignant une constante, et par conséquent à une infinité de systèmes à lignes conjuguées. En prenant pour r, r_1, r_2 des quantités proportionnelles à ρ, ρ_1, ρ_2 , on sera conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} x &= A(\rho + h)^m (\rho_1 + h)^{m_1} (\rho_2 + h)^{m_2}, \\ y &= B(\rho + h)^m (\rho_1 + h)^{m_1} (\rho_2 + h)^{m_2}, \\ z &= C(\rho + h)^m (\rho_1 + h)^{m_1} (\rho_2 + h)^{m_2}. \end{aligned}$$

L'avantage des systèmes à lignes conjuguées consiste en ce qu'on peut les soumettre à des transformations homographiques quelconques, sans leur faire perdre leur propriété essentielle. Dans les équations (34), on peut regarder les variables u comme des coordonnées homogènes par rapport à un tétraèdre de référence quelconque, car de telles coordonnées ne sont que des fonctions linéaires des coordonnées ordinaires, et par conséquent satisfont aux mêmes équations. Ainsi, x, y, z, t désignant maintenant des coordonnées homogènes, les équations

$$34) \quad \begin{cases} x = A(\rho + a)^m (\rho_1 + a)^{m_1} (\rho_2 + a)^{m_2}, \\ y = B(\rho + b)^m (\rho_1 + b)^{m_1} (\rho_2 + b)^{m_2}, \\ z = C(\rho + c)^m (\rho_1 + c)^{m_1} (\rho_2 + c)^{m_2}, \\ t = D(\rho + d)^m (\rho_1 + d)^{m_1} (\rho_2 + d)^{m_2}. \end{cases}$$

définissent un système à lignes conjuguées.

Il est remarquable qu'on puisse déterminer généralement les lignes asymptotiques de toutes les surfaces du système. En formant, en effet, par les procédés connus l'équation des lignes asymptotiques, par exemple, de la surface $\rho_2 = \text{const.}$, on trouve

$$\frac{m(m-1)d\rho^2}{(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c)(\rho+d)} = \frac{m_1(m_1-1)d\rho_1^2}{(\rho_1+a)(\rho_1+b)(\rho_1+c)(\rho_1+d)},$$

équation où les variables sont séparées.

Dans le cas particulier où l'on a

$$m = m_1 = m_2 = \frac{1}{p},$$

en prenant

$$f(u) = (u - a)(u - b)(u - c)(u - d),$$

$$A^p = \frac{1}{f'(a)}, \quad B^p = \frac{1}{f'(b)}, \quad \dots,$$

on trouvera, pour l'équation du système triple,

$$\frac{x^p}{\lambda + a} + \frac{y^p}{\lambda + b} + \frac{z^p}{\lambda + c} + \frac{t^p}{\lambda + d} = 0,$$

où l'on doit prendre pour λ successivement les valeurs ρ, ρ_1, ρ_2 . C'est la généralisation du système des surfaces du second degré.

On obtient d'autres séries de systèmes à lignes conjuguées, en faisant, dans les formules (38),

$$r = -\frac{\rho}{h}, \quad r_1 = -\frac{\rho_1}{h}, \quad r_2 = -\frac{\rho_2}{h},$$

h étant une constante. On obtient ainsi les équations simultanées

$$(40) \quad \begin{cases} (\rho_1 - \rho) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} + h \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho_1} \right) = 0, \\ (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + h \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \frac{\partial u}{\partial \rho_2} \right) = 0, \\ (\rho - \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_2} + h \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_2} - \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0, \end{cases}$$

qu'on peut intégrer complètement dans un grand nombre de cas, et qui se rencontrent dans l'étude de plusieurs problèmes.

On en aura d'abord une solution étendue, en prenant

$$u = \sum A_i (\rho + a_i)^{-h} (\rho_1 + a_i)^{-h} (\rho_2 + a_i)^{-h},$$

a_i, A_i étant des constantes, et la somme renfermant un nombre quelconque de termes.

L'opération

$$\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \frac{\partial}{\partial \rho_2},$$

appliquée à une solution quelconque, donne encore une solution, car cette opération n'a aucun effet sur les coefficients.

L'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \rho_1 \partial \rho_2}$$

donne le même système dans lequel h est changé en $h + 1$. Si donc on sait l'intégrer pour une valeur de h , et que la dérivation précédente, appliquée à l'intégrale, ne donne pas un résultat nul, on saura l'intégrer pour $h + 1$.

Réciproquement, si l'on en connaît l'intégrale pour une valeur de h , V , l'intégrale U pour $h - 1$ sera définie par l'équation

$$V = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \rho_1 \partial \rho_2},$$

qui, jointe à celles qui constituent le système, fera connaître U .

Si donc on connaît l'intégrale pour h , on pourra la trouver pour $h \pm n$, n étant entier.

Prenons, par exemple, $h = 1$, c'est-à-dire le système

$$(41) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} (\rho_i - \rho_k) = \frac{\partial u}{\partial \rho_i} - \frac{\partial u}{\partial \rho_k}.$$

On trouve facilement son intégrale, qui est

$$(42) \quad u = \frac{R}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)},$$

où R_i dépend seulement de ρ_i , et par suite l'intégrale pour $h = n$, n étant entier positif, sera

$$u = \frac{\partial^{2n}}{\partial \rho^n \partial \rho_1^n \partial \rho_2^n} \left[\frac{R}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)} \right].$$

Il est, du reste, intéressant de remarquer que la voie précédente conduit à une nouvelle méthode de recherche des systèmes orthogonaux. Imaginons que l'on considère un système de trois équations de la forme de ceux que nous venons d'étudier

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} &= a_1^0 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + a_1^1 \frac{\partial u}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= a_2^1 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_2} &= a_3^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} + a_3^1 \frac{\partial u}{\partial \rho_2}. \end{aligned}$$

Je dis que, pour obtenir un système orthogonal, il suffira de connaître quatre solutions de ce système, entre lesquelles on ait la relation

$$t = x^2 + y^2 + z^2.$$

En effet, exprimons que la valeur précédente de t satisfait à la première équation, en même temps que x, y, z . En éliminant les dérivées secondes de x, y, z , nous trouverons

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0.$$

En employant de même les autres équations, nous obtiendrons les relations analogues

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \dots = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \dots = 0;$$

donc les équations qui définissent x, y, z comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 font connaître un système orthogonal. Réciproquement, dans le cas des systèmes orthogonaux, $x^2 + y^2 + z^2$ sera une solution du système précédent, auquel satisfont x, y, z .

On peut généraliser beaucoup la remarque précédente. Considérons un système d'équations de la forme

$$(43) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = a_k^i \frac{\partial u}{\partial \rho_k} + a_i^k \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + b_{ik} u, \quad i, k = 0, 1, 2,$$

et supposons que l'on ait trouvé cinq solutions de ces équations, entre lesquelles il existe une relation homogène du second degré, à coefficients constants. Par des substitutions linéaires, à coefficients constants, on pourra ramener cette relation à la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Alors x_1, \dots, x_5 , considérées comme les coordonnées pentasphériques d'un point, définissent un point de l'espace. Si l'on différentie cette équation successivement par rapport à ρ et à ρ_1 , on trouvera, en tenant compte des équations (43),

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \rho} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_1} = 0.$$

Cette relation et les deux semblables que l'on obtiendra expriment que l'on a un système orthogonal.

Si l'on ne veut pas employer le système des coordonnées pentasphériques, on pourra remarquer qu'en ramenant la relation homogène entre les solutions à la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - PT = 0,$$

les fonctions

$$x = \frac{X}{P}, \quad y = \frac{Y}{P}, \quad z = \frac{Z}{P}, \quad t = \frac{T}{P}$$

satisfont à des équations semblables à celles du système (43), mais privées du terme en u . Comme on a entre elles la relation

$$t = x^2 + y^2 + z^2,$$

nous voyons, en utilisant la remarque déjà faite précédemment, que, x, y, z étant considérées comme les coordonnées ordinaires d'un point, nous aurons un système orthogonal.

Nous aurons à faire usage de cette remarque; mais, dès à présent, nous pouvons en faire une application. Les fonctions

$$U = A \sqrt{(\rho + a)(\rho_1 + a)(\rho_2 + a)}$$

satisfont, quels que soient A et a , à des équations de la forme (40), où $h = -\frac{1}{2}$.

Si l'on pose

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

les cinq fonctions

$$x_i = \frac{\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)(\rho_2 + a_i)}}{\sqrt{f'(a_i)}}$$

sont, d'après un théorème connu sur les fractions rationnelles, liées par l'équation identique

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0.$$

Les formules précédentes définissent donc un système orthogonal. Les

trois familles seront données par l'équation

$$(44) \quad \sum \frac{x_i^2}{\lambda + a_i} = 0,$$

où l'on remplacera λ par ρ, ρ_1, ρ_2 . C'est le système formé de cyclides homofocales.

§ XVI. — *Indication de différents systèmes orthogonaux que l'on peut déduire d'un système orthogonal à n variables, supposé donné.*

En dehors de leurs applications à la Physique mathématique et à la Mécanique, les systèmes orthogonaux à n variables peuvent, comme je l'ai établi au tome LXIX des *Comptes rendus*, servir à la recherche des systèmes orthogonaux à trois variables. Depuis mes premières études, M. Lie a fait connaître aussi, dans les *Nachrichten* de Goettingue, de nouveaux moyens d'obtenir le même résultat. Je développerai d'abord mes premières recherches, et je ferai connaître ensuite d'autres résultats qui me paraissent nouveaux et différents de ceux de M. Lie.

Reprenons les formules qui donnent les dérivées des fonctions U . On en déduit

$$dU_k = -(\beta_{k1}U_1 + \dots + \beta_{kn}U_n) d\rho_k + \sum \beta_{k\mu} U_\mu d\rho_\mu$$

ou, en supposant ρ_k constant,

$$(45) \quad dU_k = \sum \beta_{k\mu} U_\mu d\rho_\mu.$$

On déduit de cette formule, en y remplaçant U_k par $X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n$, et faisant la somme des carrés,

$$(46) \quad (dX_k^1)^2 + (dX_k^2)^2 + \dots + (dX_k^n)^2 = \sum \beta_{k\mu}^2 d\rho_\mu^2.$$

Cette équation exprime que les n fonctions X_k^1, \dots, X_k^n , considérées comme dépendant de $n - 1$ variables $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n$, forment un système orthogonal. Il est vrai que ces fonctions sont en nombre trop grand d'une unité, et qu'elles sont liées par la relation

$$(47) \quad (X_k^1)^2 + \dots + (X_k^n)^2 = 1.$$

Mais il est facile de ramener ce système au type ordinaire. Pour nous rendre compte de l'opération analytique que nous allons exécuter, voyons quelle est la signification des résultats précédents dans le cas de $n = 3$.

Alors les quantités X_k^1, X_k^2, X_k^3 ou, avec les notations habituelles, X_k, Y_k, Z_k sont les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface ρ_k , ou, si l'on veut, les coordonnées du point de la sphère qui sert de représentation sphérique au point correspondant de la surface ρ_k . Notre résultat est donc la proposition connue que les représentations sphériques des lignes de courbure de chaque surface forment un système orthogonal. De ce système sphérique on peut déduire par l'inversion un système plan orthogonal, et l'on a ainsi, d'un système orthogonal à trois variables, déduit un nouveau système à deux variables. C'est une opération analogue que nous allons exécuter avec un nombre quelconque de variables.

A cet effet, posons

$$(48) \quad y_1 = \frac{X_k^1}{1 - X_k^2}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \frac{X_k^{n-1}}{1 - X_k^n}$$

En tenant compte de la relation (46), nous trouverons

$$(49) \quad dy_1^2 + \dots + dy_{n-1}^2 = \frac{1}{(1 - X_k^2)^2} (\beta_{k1}^2 d\rho_k^2 + \dots + \beta_{kn}^2 d\rho_n^2),$$

où le second membre est privé du terme en $d\rho_k$. C'est un système orthogonal ordinaire, les fonctions y_1, \dots, y_{n-1} dépendant de $\rho_1, \dots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n$, et n'étant liées par aucune relation. Les formules (48), (49) le définissent complètement. Ainsi, d'un système orthogonal à n variables, nous avons déduit un autre système à $n - 1$ variables.

Si l'on prend comme point de départ le système des coordonnées elliptiques, on obtiendra ainsi celui des cyclides homofocales. Si l'on emploie ce nouveau système, on obtiendra un nouveau système algébrique également à un nombre quelconque de variables, et l'on pourra répéter indéfiniment cette opération.

Mais on peut indiquer d'autres procédés plus généraux, conduisant au même résultat. Considérons $\rho_k, \rho_{k+1}, \rho_{k+2}, \dots, \rho_n$ comme des con-

stantes, et définissons n fonctions y par les formules

$$(50) \quad y_i = x_i + A_k X_k^i + A_{k+1} X_{k+1}^i + \dots + A_n X_n^i,$$

dont le type général est

$$(51) \quad y = u + A_k U_k + \dots + A_n U_n,$$

et qui dépendent, par conséquent, des n variables

$$\rho_1, \dots, \rho_{k-1}; A_k, \dots, A_n.$$

Si nous différencions l'équation (51), nous aurons

$$dy = du + A_k dU_k + \dots + A_n dU_n + U_k dA_k + \dots + U_n dA_n,$$

et, en substituant à du , dU_k leurs valeurs,

$$dy = U_1 (H_1 + A_k \beta_{k1} + \dots + A_n \beta_{n1}) d\rho_1 + \dots \\ + U_{k-1} (H_{k-1} + A_k \beta_{k,k-1} + \dots + A_n \beta_{n,k-1}) d\rho_{k-1} + U_k dA_k + \dots + U_n dA_n.$$

Remplaçons u , U_i par les n systèmes de valeurs x_k , X_i^k et faisons la somme des carrés des équations ainsi obtenues. Nous trouverons

$$(52) \quad dy_1^2 + \dots + dy_n^2 = \sum_{k=1}^{k=k-1} d\rho_k^2 (H_k + A_k \beta_{kk} + \dots + A_n \beta_{nk})^2 + dA_k^2 + \dots + dA_n^2,$$

et cette formule, ne contenant que les carrés des différentielles, nous montre que y_1, \dots, y_n , considérés comme fonctions de $\rho_1, \dots, \rho_{k-1}, A_k, \dots, A_n$, constituent un système orthogonal.

Dans le cas de $n = 3$, la signification géométrique des systèmes ainsi obtenus est des plus simples. Le premier, celui où l'on ne prend qu'une fonction A , est formé des surfaces parallèles à l'une des surfaces du système proposé; le second, celui où l'on prend deux fonctions A , est formé des plans normaux à la courbe d'intersection de deux surfaces du système et de deux familles de développables orthogonales à ces plans, que l'on déterminera facilement.

Revenons au cas général. Les formules (50), (51), (52) conviennent à un système orthogonal à n variables. Mais on peut, de bien des ma-

nières, diminuer le nombre de ces variables. Supposons, par exemple, qu'on établisse les relations

$$A_k = y_k, \quad \dots, \quad A_n = y_n,$$

qui déterminent A_k, \dots, A_n en fonction de $\rho_1, \dots, \rho_{h-1}$. La formule (52) deviendra

$$(53) \quad dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_{h-1}^2 = \sum_{k=1}^{h-1} (H_k + A_k \beta_{kk} + \dots + A_n \beta_{nk})^2 d\rho_k,$$

et elle montre que les fonctions y_1, \dots, y_{h-1} forment un système orthogonal à $h - 1$ variables seulement.

Nous allons faire une application des plus simples. Supposons que, pour $n = 3$, on ait constitué un système triple comprenant une famille de surfaces parallèles, on aura

$$(53) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2;$$

ρ , dans cette formule, désigne la distance de chaque surface parallèle à l'une de ces surfaces prise pour origine, (Σ).

Si nous faisons $z = \rho$, ce sera prendre sur la normale à la surface (Σ) un point à égale distance de la surface (Σ) et du plan des xy . Ce point sera donc le centre d'une sphère (S) tangente à (Σ) et au plan des xy . D'ailleurs les coordonnées du point de contact de cette sphère (S) et du plan des xy sont évidemment x, y , et l'on aura, d'après la formule (53),

$$dx^2 + dy^2 = H_1 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

d'où résulte ce curieux théorème :

Si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe et à un plan, on établira ainsi une correspondance entre les points du plan et ceux de la surface, qui sont les points de contact de la même sphère. Aux lignes de courbure de la surface correspondront sur le plan deux systèmes de lignes orthogonales.

En transformant par l'inversion, on obtient la proposition qui suit, et qu'il serait facile d'établir directement :

Si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe (Σ) et à une

sphère fixe (S), on établit une correspondance entre les points de la surface et ceux de la sphère. Aux lignes de courbure de la surface correspondent sur la sphère deux systèmes de lignes orthogonales.

Si l'on suppose que le rayon de la sphère augmente indéfiniment, on retrouve le mode ordinaire de représentation sphérique des surfaces.

Pour terminer ce qui se rapporte à l'emploi des systèmes orthogonaux à n variables, nous remarquerons que, si l'on considère trois quelconques des fonctions x_1, x_2, \dots, x_n d'un système comme dépendant uniquement de trois des variables ρ , de ρ_1, ρ_2, ρ_3 par exemple, elles satisfont à des équations de la forme (32), et par conséquent donnent un système à trois dimensions, dans lequel les surfaces se coupent suivant des lignes conjuguées.

§ XVII. — *Application à la recherche d'un système triple orthogonal comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes.*

Dans son Mémoire sur les systèmes orthogonaux isothermes (*Journal de Liouville*, t. IX, p. 317), M. Bertrand a fait connaître une belle propriété commune à tous ces systèmes. Chacune des surfaces qui le composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Mais la réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système, celui des cyclides homofocales, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. Dans mon Mémoire de 1866, j'avais eu l'idée de chercher tous les systèmes orthogonaux, nécessairement plus généraux que les systèmes isothermes, pour lesquels toute surface de chacune des trois familles possède cette propriété, c'est-à-dire peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Il est facile de trouver quelle doit être dans ce cas l'expression de la distance de deux points infiniment voisins. Posons

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2;$$

sur la surface $\rho_2 = \text{const.}$ on trouve

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2,$$

et, pour que le réseau des lignes de courbure jouisse de la propriété

indiquée, il faudra que l'on ait

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f_1(\rho_1)};$$

mais, ρ_2 étant constant pour chaque surface, les expressions des fonctions f, f_1 peuvent contenir ρ_2 , et l'on doit écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho, \rho_2)}{f_1(\rho_1, \rho_2)}.$$

Dans tout ce qui va suivre et tant que nous ne ferons pas la convention contraire, nous désignerons par une grande lettre affectée d'indice A_i une fonction ne contenant pas la variable ρ_i , et par une petite lettre affectée d'indice r_i une fonction de la seule variable ρ_i . L'indice zéro correspondant à la variable ρ sera supprimé. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{S_1}{S}.$$

On devra avoir de même, en considérant les deux autres familles,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{H}{H_2} = \frac{U}{U_2}.$$

La multiplication des trois équations nous donne

$$\frac{S_1 T_2 U}{S T_1 U_2} = 1.$$

Il est facile de voir que la solution la plus générale de cette équation est

$$\frac{U}{S} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{S_1}{T_1} = \frac{a_2}{a}, \quad \frac{T_2}{U_2} = \frac{a}{a_1}.$$

En profitant de l'indétermination des fonctions U, \dots, T_2 , qui n'entrent que par leurs rapports, on pourra prendre

$$T = U, \quad S_1 = T_1, \quad T_2 = U_2$$

et l'on sera ainsi conduit à la forme

$$H = \frac{S_1 S_2}{M}, \quad H_1 = \frac{SS_2}{M}, \quad H_2 = \frac{SS_1}{M},$$

où M sera une fonction inconnue des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2 . Pour la commodité des calculs, nous prendrons

$$(55) \quad H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2},$$

R, R_1, R_2 étant des fonctions de même définition que S, S_1, S_2 , c'est-à-dire ne contenant pas, chacune, la variable de même indice.

On est encore conduit à la recherche des mêmes systèmes orthogonaux, si l'on se propose une question intéressante que l'on peut énoncer comme il suit.

Le système des cyclides homofocales n'est pas isotherme; mais, dans un travail récent inséré au *Journal de M. Borchardt*, M. Wangerin a montré que l'on peut encore trouver, au moyen de ce système, une infinité de solutions de l'équation de la chaleur en prenant pour V une fonction de la forme

$$(56) \quad V = N f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2),$$

où N est tout à fait déterminée, mais où les fonctions f, f_1, f_2 peuvent être choisies d'une infinité de manières. Cherchons tous les systèmes orthogonaux jouissant d'une propriété semblable. L'équation de la chaleur en coordonnées curvilignes est, comme on sait, de la forme

$$(57) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\beta \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\gamma \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \quad \beta = \frac{H H_2}{H_1}, \quad \gamma = \frac{H H_1}{H}.$$

Remplaçons, dans l'équation (57), V par Nu , et développons les calculs; nous aurons

$$N \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \left(2 \alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} + N \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \right) \frac{\partial u}{\partial \rho} + u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} \right) + \dots = 0,$$

les termes non écrits se déduisant, par des permutations circulaires, des précédents. Si l'on veut que V soit de la forme (56) ou u de la

forme $f(\rho_1), f_1(\rho), f_2(\rho_2)$, on aura

$$(58) \quad N\alpha \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \left(2\alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} + N \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \right) \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} \right) + \dots = 0.$$

Les fonctions f, f_1, f_2 doivent donc satisfaire à des équations linéaires. Par exemple, si, dans l'équation précédente, on donne à ρ_1, ρ_2 deux valeurs constantes quelconques, on trouvera pour f une équation de la forme

$$af'' + bf' + cf = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions quelconques de ρ .

Réciproquement, si l'on veut que, comme cela a lieu dans le cas des cyclides, les deux solutions d'une telle équation puissent être associées aux fonctions f_1, f_2 pour donner une intégrale de l'équation de la chaleur, il faudra que l'équation (58) soit identiquement vérifiée par l'emploi de trois équations de la forme précédente, l'une pour f , l'autre pour f_1 , la troisième pour f_2 ,

$$(59) \quad \begin{cases} f''(\rho) + \varphi(\rho) f'(\rho) + \psi(\rho) f = 0, \\ f_1''(\rho_1) + \varphi_1(\rho_1) f_1'(\rho_1) + \psi_1(\rho_1) f_1 = 0, \\ f_2''(\rho_2) + \varphi_2(\rho_2) f_2'(\rho_2) + \psi_2(\rho_2) f_2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'en tirant des équations précédentes, où les fonctions φ, ψ seront convenablement choisies, les valeurs de f'', f_1'', f_2'' , et les portant dans l'équation (58), celle-ci soit vérifiée, quelles que soient $f', f, f_1', f_1, f_2', f_2$. On obtient ainsi les équations

$$(60) \quad \begin{cases} 2\alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} + N \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = \varphi(\rho) N \alpha, \\ 2\beta \frac{\partial N}{\partial \rho_1} + N \frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} = \varphi_1(\rho_1) N \beta, \\ 2\gamma \frac{\partial N}{\partial \rho_2} + N \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} = \varphi_2(\rho_2) N \gamma, \\ -N(\alpha\psi + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial N}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\beta \frac{\partial N}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\gamma \frac{\partial N}{\partial \rho_2} \right) = 0, \end{cases}$$

qui doivent être satisfaites en prenant pour les fonctions φ et ψ des valeurs convenables. La discussion se simplifiera beaucoup si l'on re-

marque que, les équations (59) étant linéaires, on peut, en remplaçant ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions convenablement choisies, les ramener à une forme où les fonctions $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ seront nulles. Alors les trois premières équations (60) se réduiront aux suivantes :

$$\frac{\partial(\alpha^2 N)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial(\beta^2 N)}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial(\gamma^2 N)}{\partial \rho_2} = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\alpha^2 N = S, \quad \beta^2 N = S_1, \quad \gamma^2 N = S_2,$$

S_i ne dépendant pas de ρ_i ; on a donc, en se rappelant la signification de α, β, γ ,

$$H = \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{N}, \quad H_1 = \frac{\sqrt{S S_2}}{N}, \quad H_2 = \frac{\sqrt{S S_1}}{N},$$

ce qui, aux notations près, est la même chose que les formules (55). La première condition à remplir, mais non la seule, est donc que les systèmes orthogonaux appartiennent à ceux que nous voulions déjà chercher. Il restera ensuite à voir si N peut satisfaire, en prenant convenablement ψ, ψ_1, ψ_2 , à la dernière équation (60). Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de la question que nous nous étions déjà proposée, en nous plaçant à un autre point de vue. Nous allons en reprendre la solution sans rien changer d'essentiel à la méthode suivie dans notre premier travail, mais en la complétant de manière à retrouver tous les systèmes orthogonaux appartenant à cette classe, même les plus simples, déjà connus, que nous avions d'abord négligés.

Nous avons ici, en reprenant les notations (55),

$$H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R + R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R + R_1}.$$

Formons d'abord les fonctions β . Nous aurons

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= e^{R-R_1} \left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right), & \beta_{10} &= e^{R_1-R} \left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right), \\ \beta_{12} &= e^{R_1-R_2} \left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right), & \beta_{21} &= e^{R_2-R_1} \left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right), \\ \beta_{20} &= e^{R_2-R} \left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right), & \beta_{02} &= e^{R-R_2} \left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Nous avons, pour abrégé, désigné par x_0, x_1, x_2 les dérivées de M ; nous adopterons une notation analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Les fonctions β doivent satisfaire aux deux groupes d'équations

$$(61) \quad \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} = \beta_{02} \beta_{11}, \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho} = \beta_{10} \beta_{02}, \quad \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} = \beta_{21} \beta_{10},$$

et

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20} \beta_{21} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} + \beta_{01} \beta_{02} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \beta_{12} \beta_{10} = 0. \end{cases}$$

Exprimons d'abord qu'elles satisfont au système (61). On trouvera

$$(63) \quad \begin{cases} x_{12} = x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + MU, \\ x_{20} = x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + MU_1, \\ x_{01} = x_0 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + MU_2, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \frac{\partial R}{\partial \rho_1}, \\ U_1 &= \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}, \\ U_2 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_2}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Pour que les équations (63) soient compatibles, il faut qu'en les différentiant elles donnent la même valeur pour

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \rho \partial \rho_1 \partial \rho_2} = x_{012}.$$

Or on trouve, en différentiant la première par rapport à ρ et rempla-

çant x_{20} , x_{10} par leurs valeurs déduites des deux autres,

$$x_{12} = x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + M \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right).$$

En opérant de même sur les autres équations, on trouvera des valeurs qui, évidemment, ne différeront de la précédente que par le coefficient de M . On doit donc avoir

$$(64) \quad \frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}.$$

Or on a identiquement

$$U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1},$$

comme il est facile de le vérifier. Il suit de là que les équations (64) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2},$$

et, comme un calcul direct donne l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0,$$

il suit que les équations (64) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0.$$

Chacune des fonctions U_i ne doit donc pas dépendre de la variable de même indice. En désignant donc par K , K_1 , K_2 trois fonctions de deux variables ne contenant pas la variable de même indice, on pourra donc toujours écrire

$$U = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2},$$

et de même pour U_1 , U_2 . Nous mettons une dérivée seconde pour la

facilité des calculs qui suivront. Nous aurons ainsi le système suivant :

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) = \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1}, \end{array} \right.$$

qui devra être vérifié, en choisissant pour K , K_1 , K_2 , des fonctions convenables.

Quant aux équations qui déterminent M , elles seront compatibles si le système précédent est vérifié, et elles deviendront

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + M \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right), \\ x_0 = x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + M \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right), \\ x_{01} = x_0 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + M \left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right). \end{array} \right.$$

Nous allons d'abord chercher la forme des fonctions R , R_1 , R_2 , qui peuvent satisfaire aux équations (65). Les équations étant différenciées par rapport à ρ , ρ_1 , ρ_2 respectivement, on trouve

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} + \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord que l'un des binômes

$$\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}$$

soit nul, que l'on ait, par exemple,

$$(68) \quad \frac{\partial (R_1 - R_2)}{\partial \rho} = 0,$$

ce qui donne, en différenciant,

$$(69) \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

Alors les équations (67) sont satisfaites. Nous avons donc ainsi une première solution. On déduit facilement des équations précédentes

$$R_1 = a + a_2, \quad R_2 = a + a_1,$$

a_i ne dépendant que de ρ_i . Quant à R , comme il ne doit satisfaire à aucune condition, ce sera une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2 . Mais on peut simplifier cette première solution.

En effet, reportons-nous aux formules (55), qui donnent les expressions de H, H_1, H_2 . Si l'on remplace ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions quelconques de trois nouveaux paramètres ρ', ρ'_1, ρ'_2 , dont les différentielles soient $e^\alpha d\rho', e^{\alpha_1} d\rho'_1, e^{\alpha_2} d\rho'_2$, et M par $M'e^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha}$, les expressions de H, H_1, H_2 deviendront

$$H' = \frac{1}{M'} e^{R_1 + R_2 + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$H'_1 = \frac{1}{M'} e^{R + R_2 + \alpha_1 + \alpha + \alpha_2},$$

$$H'_2 = \frac{1}{M'} e^{R + R_1 + \alpha_2 + \alpha + \alpha_1},$$

et l'on voit que, sans diminuer la généralité du système cherché, on peut toujours remplacer les fonctions R, R_1, R_2 par les suivantes :

$$R + \alpha_1 + \alpha_2, \quad R_1 + \alpha + \alpha_2, \quad R_2 + \alpha + \alpha_1,$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ désignent trois fonctions quelconques de ρ, ρ_1, ρ_2 .

Appliquons cette remarque à notre première solution. Nous voyons que R_1, R_2 pourront être ramenées à la forme

$$(70) \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

Tel est le type de notre première solution.

Supposons, en second lieu que, aucun des binômes $\frac{\partial(R_1 - R_2)}{\partial \rho}$ n'étant nul, car, sans cela, on retomberait sur la solution précédente, une des

trois quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}$$

soit nulle. En vertu des équations (67), les deux autres devront être nulles, et l'on aura

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_1} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$R = a_1 + a_2, \quad R_1 = b + b_2, \quad R_2 = c + c_1.$$

En introduisant les trois fonctions arbitraires α , on pourra donner à cette solution la forme

$$(71) \quad R = a_1 - a_2, \quad R_1 = a_2 - a, \quad R_2 = a - a_1.$$

En dehors de ces deux solutions exceptionnelles, il en existe pour lesquelles aucune des quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2}$$

n'est nulle. Alors la comparaison des équations (65), (67) nous donnera

$$\frac{\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}}{\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}} = \frac{\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2}}{\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}} = \frac{\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1}}{\frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}}.$$

La valeur commune de ces trois rapports, le premier ne dépendant pas de ρ , le deuxième de ρ_1 et le troisième de ρ_2 , ne peut être qu'une constante h . Si l'on en déduit les valeurs des dérivées des fonctions K , et qu'on les porte dans les équations (65), on aura

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) = h \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) = h \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) = h \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}. \end{array} \right.$$

Chacune de ces équations s'intègre sans difficulté. La première, par exemple, donne

$$R - R_1 - R_2 = -h \log(S_1 + S_2),$$

S_1, S_2 étant des fonctions de même définition que R_1, R_2 ; R ne contenant pas ρ , on peut donner à ρ une valeur constante qui transforme R_1, S_1 en des fonctions de ρ_2 ; R_2, S_2 en des fonctions de ρ_1 . On a donc, pour l'expression générale de R ,

$$(73) \quad R = \alpha_1 + \alpha_2 - h \log(a_1 - a_2),$$

α_i, a_i dépendant seulement de ρ_i .

Cela posé, prenons la première des équations (72), et posons

$$S = -h \log(a_1 - a_2),$$

$$R = \alpha_1 + \alpha_2 + S, \quad R_1 = \alpha_2 + S_1, \quad R_2 = \alpha_1 + S_2.$$

Nous avons étudié à part le cas où

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \rho \partial \rho_2}$$

est nul; nous pouvons donc supposer que les dérivées $\frac{\partial S_1}{\partial \rho_1}, \frac{\partial S_2}{\partial \rho_2}$ ne sont pas nulles, et la première des équations (72) pourra être écrite

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1}} + \frac{\frac{\partial S}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial S_1}{\partial \rho_2}} = 1$$

ou

$$\frac{h a'_1}{\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1}} + a_1 = \frac{h a'_2}{\frac{\partial S_1}{\partial \rho_2}} + a_2.$$

Les deux membres de l'équation précédente sont indépendants, l'un de ρ_1 , l'autre de ρ_2 . Ils sont donc égaux à une même fonction de ρ, a . On a donc

$$\frac{\partial S_2}{\partial \rho_1} = \frac{h a'_1}{a - a_1}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \rho_2} = \frac{h a'_2}{a - a_2},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$S_1 = \beta - h \log(a_2 - a),$$

$$S_2 = \alpha - h \log(a - a_1),$$

β , α dépendant seulement de ρ , et par suite

$$R_2 = \alpha_1 + \alpha - h \log(a - a_1),$$

$$R_1 = \beta + \alpha_2 - h \log(a_2 - a).$$

En substituant ces valeurs, ainsi que celles de R , dans les formules (72), on trouve

$$\beta' - \alpha' = 0.$$

On peut supposer $\beta = \alpha$, sans restreindre la généralité, et l'on obtient la forme définitive de la troisième solution

$$(74) \quad \begin{cases} R = \alpha_1 + \alpha_2 - h \log(a_1 - a_2), \\ R_1 = \alpha + \alpha_2 - h \log(a_2 - a), \\ R_2 = \alpha + \alpha_1 - h \log(a - a_1), \end{cases}$$

aucune des trois fonctions α , α_1 , α_2 ne pouvant se réduire à une constante; car, sans cela, une des trois quantités

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}$$

serait nulle, et nous retrouverions une des solutions déjà mises à part.

En résumé, nous avons les trois types de solutions (70), (71), (74). Nous allons les examiner successivement. Mais auparavant indiquons, d'une manière précise, le point où nous sommes parvenus.

La fonction M devra satisfaire aux trois équations (66) qui seront compatibles; mais il nous reste à exprimer que les fonctions β satisfont au système

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20} \beta_{21} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} + \beta_{10} \beta_{21} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \beta_{10} \beta_{12} = 0, \end{cases}$$

ce qui va donner trois nouvelles équations aux dérivées partielles pour la fonction M . Or ces nouvelles équations ne contiennent que les dérivées secondes x_{00} , x_{11} , x_{22} de M , et il est aisé de les résoudre par rap-

port à ces dérivées. On trouve ainsi

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{2R} \left[-\frac{2x_0}{M} + \frac{x_0^2}{M^2} + \frac{2x_1}{M} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) - 3 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho^2} \right] \\ & + e^{2R_1} \left[\left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} \right) \right] \\ & + e^{2R_2} \left[\left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho_2^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

et les deux autres équations que l'on obtiendrait en effectuant les permutations des indices 0, 1, 2.

Ces nouvelles équations ne sont pas nécessairement compatibles avec les équations (66). Cherchons d'abord quel est le degré de généralité de la solution commune qu'elles doivent avoir:

S'il existe un système orthogonal répondant à la question, ses transformés par inversion donneront aussi des solutions dans lesquelles M sera remplacé par

$$kM[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2],$$

x, y, z étant les coordonnées rectilignes et a, b, c, k quatre constantes. Il faut donc que la solution commune des équations (66), (76) contiennent au moins quatre constantes, c'est-à-dire qu'on puisse prendre arbitrairement la fonction M et ses dérivées premières pour un système donné de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 : or, comme ces équations déterminent toutes les dérivées secondes, on voit qu'elles ne peuvent pas admettre une solution plus générale. En différentiant les équations, on en déduira deux ou trois valeurs pour les dérivées troisièmes de M; il faudra que ces valeurs d'une même dérivée soient égales, quels que soient x_0, x_1, x_2 , c'est-à-dire qu'elles soient les mêmes, terme pour terme.

On a déjà exprimé, en étudiant le système (66), que les trois valeurs déduites pour $x_{0,2}$ en différentiant ces équations sont égales; il resterait à exprimer que les deux valeurs que l'on obtient pour $x_{0,1}$, soit en différentiant par rapport à ρ la troisième équation (66), soit en différentiant par rapport à ρ_1 la première (76), sont égales terme à terme. Cela fait, les six équations auraient une solution commune avec quatre constantes arbitraires. Les différentiations poussées à un

ordre quelconque ne donneraient jamais qu'une valeur pour chaque dérivée.

Le calcul indiqué n'est pas impraticable, mais on peut l'abrégier beaucoup et le faire sous une autre forme, en remarquant que les six équations (66), (76) offrent des combinaisons intégrables.

Considérons en effet les deux équations

$$\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} + \beta_{10} \beta_{20} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} + \beta_{12} \beta_{20} = 0$$

du groupe (75) et multiplions-les respectivement par $\beta_{10} d\rho_1$, $\beta_{20} d\rho_2$. En vertu des équations (61), elles pourront s'écrire

$$\beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \beta_{10} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} d\rho = 0,$$

$$\beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho} d\rho = 0.$$

En les ajoutant et supposant constante la variable ρ , on trouve

$$(78) \quad d \frac{\beta_{10}^2 + \beta_{20}^2}{2} + \beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho} d\rho + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} d\rho = 0.$$

Or on a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} \right),$$

et par conséquent, en regardant toujours ρ comme une constante, la différentielle

$$\beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho} d\rho_2$$

peut être exactement intégrée. On trouve en effet

$$\beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2 \partial \rho_1} (K_2 - \log M) - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right)^2}{2},$$

et, en intégrant,

$$\int \beta_{11} \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \rho} d\rho_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial K_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_1 - \log M) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - L_1 + \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_1}{\partial \rho},$$

L_1 désignant une fonction ne dépendant pas de ρ_1 , et les deux termes qui suivent et qui ne contiennent pas ρ_1 étant ajoutés pour la symétrie des calculs. On aura de même

$$\int \beta_{22} \frac{\partial \beta_{22}}{\partial \rho} d\rho_2 = \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_2 - \log M) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 - L_2 + \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial K_2}{\partial \rho},$$

L_2 ne contenant pas ρ_2 . Les deux fonctions L_1, L_2 doivent être telles que ces intégrales soient égales, ce qui donne, en retranchant,

$$(79) \quad L_1 - L_2 = \frac{\partial (R_2 - R_1)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right).$$

Il est facile de voir que la dérivée seconde du second membre par rapport à ρ_1, ρ_2 est nulle comme celle du premier. Le second membre est donc de la forme

$$A_1 - A_2,$$

A_i ne contenant pas ρ_i , et l'on a

$$L_1 = A_1 + f(\rho),$$

$$L_2 = A_2 + f(\rho),$$

ce qui détermine L_1, L_2 à une fonction près de ρ .

En substituant, dans l'équation (78), la valeur de l'intégrale, on trouve

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{2R} \left[\frac{2x_{11}}{M} - \frac{x_1^2}{M^2} - 2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \frac{x_1}{M} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 + 2L_1 - 2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_1}{\partial \rho} \right] \\ & \quad - e^{2R_1} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - e^{2R_2} \left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne une nouvelle équation aux dérivées partielles, à laquelle satisfait la fonction M . Si l'on compare cette équation à la formule (76) et qu'on élimine entre elles x_{00} , toutes les dérivées premières disparaissent aussi, et il reste l'équation de condition

$$81. \quad \left. \begin{aligned} & e^{2R} \left[2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} - 2 L_1 - \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial (K_1 + K_2)}{\partial \rho} + 3 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho^2} \right] \\ & + e^{2R_1} \left[\frac{\partial^2 (R - R_1)}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial (R - R_1)}{\partial \rho_1} \right] + e^{2R_2} \left[\frac{\partial^2 (R - R_1)}{\partial \rho_2^2} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} \frac{\partial (R - R_1)}{\partial \rho_2} \right] = 0 \end{aligned} \right\}$$

Cette formule, où L_1 est défini par l'équation (79), donne une condition nouvelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions R, R_1, R_2 . En permutant les indices dans les formules (79), (81), on aurait deux autres équations entre les mêmes fonctions.

Maintenant toute difficulté relative à la fonction M a disparu. Il faudra d'abord trouver les fonctions R, R_1, R_2 pouvant vérifier l'équation (81) et les deux équations semblables. Cela fait, il ne restera plus qu'à intégrer les six équations simultanées toujours compatibles auxquelles satisfait M .

Appliquons ces remarques à l'étude de nos trois solutions (70), (71), (74). Pour la première, on a

$$R_1 = R_2 = 0, \quad H = \frac{1}{M}, \quad H_1 = \frac{e^R}{M}, \quad H_2 = \frac{e^R}{M},$$

c'est-à-dire

$$ds^2 = \frac{1}{M^2} [d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)].$$

La forme même de cette dernière expression nous apprend tout de suite que les surfaces $\rho = \text{const.}$ sont des sphères ou des plans; car on peut, en changeant les variables ρ_1, ρ_2 en d'autres ρ'_1, ρ'_2 , obtenir, et d'une infinité de manières,

$$d\rho_1^2 + d\rho_2^2 = \lambda (d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2),$$

et, par conséquent, les surfaces ρ , ayant une infinité de lignes de courbure, sont des sphères ou des plans. On voit même que les autres surfaces les coupent suivant des lignes isothermes.

Ici l'on a

$$R_1 = R_2 = K_1 = K_2 = 0.$$

L'équation (79) devient

$$L_1 - L_2 = 0$$

et donne

$$L_1 = f(\rho).$$

La formule (81) devient

$$-2f(\rho)e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0,$$

et, comme R ne contient pas ρ , il faut que $f(\rho)$ soit une constante, ce qui donne

$$(82) \quad C e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Cette équation nous apprend que la formule

$$ds^2 = e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

convient à une surface de courbure constante et égale à C. Supposons d'abord $C = 0$; alors, en remplaçant ρ_1, ρ_2 par des fonctions nouvelles de ces variables, on pourra toujours ramener

$$e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2,$$

et nous aurons, pour le système orthogonal cherché,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2} (d\rho^2 + d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Or nous savons que cette forme ne peut convenir qu'au système formé de trois familles de plans rectangulaires et à ses transformés par inversion. Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2 , on voit que ce premier cas nous donne *les systèmes formés d'une famille de plans parallèles, de deux familles de cylindres isothermes et les systèmes qui en sont les transformés par inversion.*

Traisons maintenant le cas où la constante C est positive et égale à a^2 . Alors on pourra ramener

$$e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2),$$

ce qui donnera, pour le système orthogonal cherché,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2} (d\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + a^2 d\theta^2),$$

ou, en remplaçant ρ par $a \log \rho$,

$$ds^2 = \frac{1}{N^2} [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2 , on voit que cette nouvelle solution donne *les systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes et leurs transformés par inversion.*

Enfin supposons la constante C négative et égale à $-a^2$; on pourra ramener

$$e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

et, en remplaçant ρ par $a\omega$, on aura, pour le système orthogonal,

$$ds^2 = \frac{1}{M^2} (y^2 d\omega^2 + dx^2 + dy^2).$$

Cette forme convient aux systèmes formés d'une famille ($x = \text{const.}$) de plans parallèles, d'une famille ($\omega = \text{const.}$) de plans passant par une droite, d'une famille ($y = \text{const.}$) de cylindres de révolution ayant cette droite pour axe, et à leurs transformés par inversion. En tenant compte du changement des variables ρ_1, ρ_2 , on voit que nous avons ici *tous les systèmes formés d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment un système orthogonal isotherme, ainsi que leurs transformés par inversion.*

Étudions maintenant la deuxième solution, pour laquelle on a

$$R = a_1 - a_2, \quad R_1 = a_2 - a, \quad R_2 = a - a_1.$$

On trouve ici

$$K = -4a_1 a_2, \quad K_1 = -4a a_2, \quad K_2 = -4a a_1, \quad L_1 - L_2 = -8a'^2 (a_1 + a_2),$$

a' désignant la dérivée de a , et, par conséquent,

$$L_1 = -8a'^2 a_2 + f(\rho).$$

L'équation (81) à vérifier devient ici

$$-4(a'' + a'^2)(a_1 + a_2) + 8a'^2 a_2 + f_1(\rho) + e^{4a_1 - 2a - 2a_1}(a_1'' + a_1'^2) + e^{2a + 2a_1 - 4a_1}(a_2'^2 - a_2'') = 0.$$

Si l'on prend la dérivée seconde par rapport à ρ_1, ρ_2 , on trouve

$$e^{-2a} \frac{d}{d\rho_2} e^{4a_1} \frac{d}{d\rho_1} e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) + e^{2a} \frac{d}{d\rho_1} e^{-4a_1} \frac{d}{d\rho_2} e^{2a_1}(a_2'^2 - a_2'') = 0.$$

Les fonctions a, a_1, a_2 ne peuvent être des constantes, sans quoi on retomberait sur la première solution. L'équation précédente ne peut donc être vérifiée que si l'on a

$$e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) = C, \quad e^{2a_1}(a_2'^2 - a_2'') = C'.$$

C, C' étant des constantes. L'équation à vérifier prend donc la forme

$$-4(a'' + a'^2)a_1 - 4(a'' - a'^2)a_2 + f_1(\rho) + C e^{4a_1 - 2a} + C' e^{2a - 4a_1} = 0.$$

Prenons les deux dérivées du premier membre par rapport à ρ_1 et à ρ_2 , nous trouverons

$$\begin{aligned} -4(a'' + a'^2) - 4C' e^{2a - 4a_1} &= 0, \\ -4(a'' - a'^2) + 4C e^{4a_1 - 2a} &= 0, \end{aligned}$$

équations auxquelles il est impossible de satisfaire; donc la seconde hypothèse ne conduit à rien.

Il nous reste maintenant à étudier la troisième solution (74), et comme, dans les formules qui la définissent, a, a_1, a_2 ne sont jamais des constantes, mais des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , nous les prendrons pour les valeurs mêmes de ces paramètres, et nous écrirons, en changeant les notations,

$$(83) \quad \begin{cases} R = -\frac{1}{2} \log a_1 - \frac{1}{2} \log a_2 - h \log(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 = -\frac{1}{2} \log a_2 - \frac{1}{2} \log a - h \log(\rho_2 - \rho), \\ R_2 = -\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log a_1 - h \log(\rho - \rho_1). \end{cases}$$

En modifiant un peu la fonction M, et la remplaçant par

$$(84) \quad \frac{M}{\sqrt{a_1 a_2}},$$

il en résultera, pour H, H_1, H_2 , les expressions suivantes :

$$85) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h} (\rho - \rho_2)^{-h}}{M \sqrt{a}}, \\ H_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^{-h} (\rho_1 - \rho)^{-h}}{M \sqrt{a_1}}, \\ H_2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^{-h} (\rho_2 - \rho_1)^{-h}}{M \sqrt{a_2}}, \end{array} \right.$$

et les équations (66), auxquelles doit satisfaire M , deviendront, en tenant compte de la modification (84) pour M ,

$$86) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{01}(\rho_1 - \rho) + h(x_0 - x_1) = 0, \\ x_{12}(\rho_2 - \rho_1) + h(x_1 - x_2) = 0, \\ x_{20}(\rho - \rho_2) + h(x_2 - x_0) = 0. \end{array} \right.$$

Il nous reste à exprimer que R, R_1, R_2 vérifient l'équation (81). Cette équation devient ici

$$87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\rho_2 - \rho_1} \left[F(\rho) + \frac{2h^2 - 3h^2}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} - \frac{a'}{2a} (2h^2 - h) \left(\frac{1}{\rho_2 - \rho} + \frac{1}{\rho_1 - \rho} \right) + \frac{h - h^2}{(\rho_1 - \rho)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho_2 - \rho)^2} \right] \\ + \frac{a_1}{\rho - \rho_2} \left[-\frac{ha'_1}{2a_1} \frac{\rho_2 - \rho}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)} - \frac{h}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho_1 - \rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} \right] \\ + \frac{a_2}{\rho_1 - \rho} \left[-\frac{ha'_2}{2a_2} \frac{\rho_1 - \rho}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho)} - \frac{h}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho_2 - \rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)} \right] = 0. \end{array} \right.$$

On a réuni dans $F(\rho)$, à la fonction inconnue de ρ , tous les termes qui ne dépendent que de ρ . On aurait, en permutant les indices, deux équations semblables.

Voyons comment on pourra satisfaire à l'équation (87). Remplaçons- ρ_1, ρ_2 par les expressions

$$\rho_2 = \rho + u, \quad \rho_1 = \rho + \alpha u,$$

et multiplions par u^{2h-2} . Elle deviendra

$$\begin{aligned} & \frac{a(\rho)}{1 - \alpha^{2h}} \left[F(\rho) u^2 + \frac{2h^2 - 3h^2}{\alpha} - \frac{a' u}{2a} (2h^2 - h) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + h - h^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ & + \frac{a_1(\rho_1)}{(-1)^{2h}} \left[-\frac{ha'_1}{2a_1} u \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) - \frac{h}{(1 - \alpha)^2} + \frac{h - h^2}{\alpha^2} + \frac{h^2}{\alpha(\alpha - 1)} \right] \\ & + \frac{a_2(\rho_2)}{\alpha^{2h}} \left[-\frac{ha'_2}{2a_2} u \frac{\alpha}{\alpha - 1} + h - h^2 \frac{h}{1 - \alpha^2} + \frac{h^2}{1 - \alpha} \right] = 0. \end{aligned}$$

Si maintenant nous faisons $u = 0$, ρ_1, ρ_2 deviendront égaux à u , quel que soit α , et l'équation précédente se réduira à la suivante :

$$(88) \quad \left(\begin{aligned} & \frac{a(\rho)}{(1-\alpha)^h} \left[\frac{2h^2-3h^2}{\alpha} + (h-h^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ & + (-1)^{2h} a_1(\rho) \left[\frac{h-h^2}{\alpha^2} + \frac{h^2}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{h}{(\alpha-1)^2} \right] \\ & + \frac{a_2(\rho)}{\alpha^{2h}} \left[h-h^2 - \frac{h}{(1-\alpha)^2} + \frac{h^2}{1-\alpha} \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui devra être satisfaite, quels que soient ρ et α .

Supposons d'abord $h < 1$, $2h < 2$. En multipliant par $(1-\alpha)^2$ et faisant ensuite $\alpha = 1$, on trouve

$$a_2(\rho) = (-1)^{2h+1} a_1(\rho),$$

Multipliant par α^2 et faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$a(\rho) = (-1)^{2h+1} a_1(\rho).$$

Par suite, on a

$$a(\rho) = a_2(\rho),$$

et, en permutant les indices,

$$a_1(\rho) = a(\rho),$$

ce qui donne

$$(-1)^{2h+1} = 1, \quad a(\rho) = a_1(\rho) = a_2(\rho).$$

Ainsi les symboles a, a_1, a_2 représentent une même fonction. En les supprimant dans l'équation (88), on a une nouvelle équation, qui devra être satisfaite, quel que soit α . En développant suivant les puissances de α , elle prend la forme

$$2h^2 - 5h^2 + h^2 + 2h + A\alpha + B\alpha^2 + \dots + \alpha^{-2h} [(h^2 - 2h)\alpha + A'\alpha^2 + \dots] = 0.$$

Il y a à distinguer trois cas : 1° $2h > 1$. Alors le premier terme du développement précédent est

$$\alpha^{1-2h}(h^2 - 2h),$$

et, comme h est supposé plus petit que 1, il n'est pas nul. Donc l'équation n'est pas satisfaite. 2° $2h = 1$. Alors l'équation (88) est satisfaite.

Voilà donc une première solution possible

$$h = \frac{1}{2}.$$

3° $2h < 1$. Alors le premier terme du développement est le terme constant

$$2h^3 - 5h^2 + h^2 + 2h,$$

qui doit être nul. On a donc

$$2h^3 - 5h^2 + h^2 + 2h = h(2h + 1)(h - 1)(h - 2) = 0.$$

La seule solution compatible avec l'hypothèse est $h = -\frac{1}{2}$. L'hypothèse $h = 0$ ne convient pas, elle nous conduirait à une forme des fonctions R qui a déjà été examinée. Nous avons donc la deuxième solution

$$h = -\frac{1}{2}.$$

Et en effet, dans ce cas également, l'équation (88) est satisfaite.

Jusqu'ici nous avons supposé $h < 1$. Nous avons donc à considérer encore le cas où h est égal ou supérieur à l'unité. Commençons par le supposer plus grand que 1. Si, dans l'équation (88), nous multiplions par $(1 - \alpha)^{2h}$, et que nous fassions $\alpha = 1$, il restera

$$a(\rho)(2h^3 - 5h^2 + 2h) = 0,$$

$$h(2h - 1)(h - 2) = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$h = 2.$$

En effet, dans ce cas encore, l'équation (88) se réduira à

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0,$$

et sera vérifiée, si cette équation est satisfaite.

Enfin la dernière hypothèse à examiner $h = 1$ nous conduit à la même conclusion. L'équation (88) sera vérifiée, si les trois fonctions a, a_1, a_2 satisfont à la même condition

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

En résumé, nous avons quatre types de solution possibles, correspondant aux valeurs de h

$$h = -\frac{1}{2}, \quad h = +\frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Pour les deux premières solutions, les trois fonctions a, a_1, a_2 sont des valeurs d'une même fonction pour $x = \rho, x = \rho_1, x = \rho_2$. Pour les deux dernières, lorsqu'on fait $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, les trois fonctions doivent satisfaire à la condition

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

Une remarque simple va nous guider dans la discussion complète de ces quatre types. Reprenons les valeurs des quantités H, H_1, H_2 ; on a, par exemple,

$$H = \frac{(\sigma - \sigma_1)^{-h} (\sigma_1 - \rho)^{-h}}{M \sqrt{a(\rho)}},$$

et supposons que $a(\rho)$ soit un polynôme de degré p . Il est facile de trouver une relation entre p et h . En effet, si nous effectuons la substitution

$$\rho = \frac{1}{\rho'}, \quad \rho_1 = \frac{1}{\rho'_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\rho'_2},$$

on verra facilement que la forme (83), qui nous a servi de point de départ, ne sera pas changée. H deviendra

$$\frac{(\rho' - \rho'_1)^{-h} (\rho'_2 - \rho')^{-h}}{M \rho^{-h} \rho_1^{-h} \rho_2^{-h} \sqrt{a'(\rho')}} \rho'^{\frac{p}{2} + h - 2},$$

$a'(\rho)$ étant ce que devient $a(\rho)$ lorsqu'on remplace ρ par $\frac{1}{\rho}$ et que l'on multiplie par ρ'^p . Pour que cette forme soit équivalente à la précédente, il faut que

$$\frac{p}{2} + h - 2 = 0, \quad p = 4 - 2h.$$

Ainsi, si la fonction $a(\rho)$ est un polynôme, il faut qu'elle soit du degré $p - 4h$. Cette remarque nous servira de vérification.

Commençons par l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$, nous aurons ici

$$(89) \quad \Pi = \frac{\sqrt{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}}{M \sqrt{a(\rho)}}, \quad \Pi_1 = \frac{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}}{M \sqrt{a(\rho_1)}}, \quad \Pi_2 = \frac{\sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}}{M \sqrt{a(\rho_2)}}.$$

Il nous reste à déterminer la fonction $a(\rho)$ et M .

A cet effet, reprenons l'équation (87), remplaçons-y h par sa valeur $-\frac{1}{2}$; multiplions-la par $(\rho - \rho_1)^2(\rho_1 - \rho_2)^2$, et prenons la dérivée sixième par rapport à ρ_1 , il viendra

$$\frac{(\rho - \rho_2)^2}{4} \frac{\partial^6}{\partial \rho_1^6} [a_1(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho) + a_1(5\rho_1 - 2\rho - 3\rho_2)] = 0,$$

ou, en développant,

$$2 \frac{d^2 a_1}{d \rho_1^2} (\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho) + 3 \frac{d^6 a_1}{d \rho_1^6} (\rho_2 + 2\rho - 3\rho_1) = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu identiquement, il faut que l'on ait

$$\frac{d^6 a_1}{d \rho_1^6} = 0,$$

ce qui donne, pour la fonction $a(x)$, un polynôme du cinquième degré

$$a(\rho) = A + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3 + E\rho^4 + F\rho^5.$$

La question est résolue, et il est inutile de continuer la recherche. On sait, en effet, qu'il existe un système de cyclides homofocales qui conduit à l'expression

$$ds'^2 = \frac{1}{M'^2} \left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) d\rho^2}{a(\rho)} + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2) d\rho_1^2}{a(\rho_1)} + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1) d\rho_2^2}{a(\rho_2)} \right].$$

Si donc on le compare au système cherché, on aura

$$M' ds'^2 = M^2 ds^2,$$

ce qui exige, comme nous l'avons vu, que les deux systèmes soient les mêmes ou se déduisent l'un de l'autre par une inversion. Nous n'aurons donc ainsi que le système des cyclides homofocales.

Examinons maintenant l'hypothèse $h = 2$. Reportons-nous à l'équa-

tion (87). Faisons-y $h = 2$ et multiplions par $(\rho_1 - \rho_2)^4$. En posant ensuite $\rho_1 = \rho_2$, il restera

$$F(\rho) - \frac{6a'}{a} \frac{1}{\rho - \rho_1} = 0,$$

équation qui ne peut être vérifiée, quels que soient ρ et ρ_1 , que si l'on a

$$a' = 0, \quad F(\rho) = 0.$$

Ainsi les trois fonctions a, a_1, a_2 se réduisent ici à des constantes, et l'équation (87) se réduit à l'unique condition

$$a + a_1 + a_2 = 0,$$

qui doit avoir lieu entre ces constantes. Nous aurons donc une nouvelle solution, pour laquelle on aura

$$(90) \quad \begin{cases} R = -\frac{1}{2}La_1 - \frac{1}{2}La_2 - 2 \log(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 = -\frac{1}{2}La - \frac{1}{2}La_2 - 2 \log(\rho_2 - \rho), \\ R_2 = -\frac{1}{2}La - \frac{1}{2}La_1 - 2 \log(\rho - \rho_1), \end{cases}$$

les constantes a, a_1, a_2 étant liées par la relation

$$(91) \quad a + a_1 + a_2 = 0.$$

Traisons maintenant l'hypothèse $h = 1$. Après quelques réductions, l'équation (87) deviendra

$$(92) \quad \begin{cases} 0 = (a' - a'_2)(\rho_2 - \rho_1) + 2(a + a_1 + a_2) \\ \quad + a'(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) + (\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)F(\rho) = 0, \end{cases}$$

$F(\rho)$ étant une fonction arbitraire dont on peut disposer de manière à satisfaire à l'équation.

Différentions-la deux fois par rapport à ρ_1 , nous aurons

$$a''_1(\rho_2 - \rho_1) = 0,$$

ce qui exige que a''_1 soit nul. Donc a_1 , et par conséquent a_1 et a_2 , sont des polynômes du second degré au plus. On a

$$(93) \quad \begin{cases} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2. \end{cases}$$

D'ailleurs, si, dans l'équation (92), on prend $\rho = \rho_1 = \rho_2$, il reste

$$a + a_1 + a_2 = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(94) \quad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

et alors on verra que l'équation (91) est identiquement vérifiée en prenant $F(\rho) = 2m$. On a donc une nouvelle solution, et nous sommes assurés de pouvoir trouver un système orthogonal correspondant. Il nous restera seulement à déterminer la fonction M.

Il n'y a plus qu'à examiner la dernière hypothèse $h = \frac{1}{2}$. Nous savons qu'alors a , a_1 , a_2 sont trois valeurs différentes de la même fonction. L'équation (87) devient alors, en chassant les dénominateurs.

$$(95) \quad \begin{cases} (a_2 - a)(\rho - \rho_1)^2(2\rho - 3\rho_2 + \rho_1) + (a_1 - a)(\rho - \rho_2)^2(3\rho_1 - 2\rho - \rho_2) \\ + a'_1(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)^2 - a'_2(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)(\rho - \rho_1)^2 \\ + \varphi(\rho)(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = 0. \end{cases}$$

$\varphi(\rho)$ étant une fonction arbitraire provenant de la réunion à $f(\rho)$ de termes en ρ . En prenant la dérivée troisième successivement par rapport à ρ_1 et à ρ_2 , on trouve

$$\frac{d^3}{d\rho_1^3} a'_1(\rho_1 - \rho) - \frac{d^3}{d\rho_1^3} a'_2(\rho_2 - \rho) + \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} - \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} = 0,$$

ou

$$(\rho_1 - \rho) \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} + 2 \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} - (\rho_2 - \rho) \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} - 2 \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} = 0, \quad \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} = 0,$$

et, par conséquent, a , a_1 , a_2 sont des polynômes du troisième degré.

On a ici

$$\begin{aligned} a &= m\rho^3 + n\rho^2 + p\rho + q, \\ a_1 &= m\rho_1^3 + n\rho_1^2 + p\rho_1 + q, \\ a_2 &= m\rho_2^3 + n\rho_2^2 + p\rho_2 + q. \end{aligned}$$

Avec ces hypothèses, l'équation (95) est vérifiée en prenant $\varphi = 0$,
 quelles que soient les constantes m, n, p, q .

Ainsi, nous sommes dès à présent assurés de trouver trois systèmes
 correspondant aux trois hypothèses

$$h = \frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Mais aussi nous nous trouvons en présence d'une difficulté nouvelle.
 Jusqu'ici nous avons rencontré des systèmes connus, et nous n'a-
 vions pas eu à achever les calculs qu'exige l'application de la
 méthode générale. Ici, au contraire, nous devons d'abord intégrer les
 six équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait la fonction M ,
 et qui doivent donner, nous le savons, une solution avec quatre con-
 stantes arbitraires. Ensuite, quand M aura été obtenu, il faudra cher-
 cher les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z . Mais nous
 montrerons que ce problème est beaucoup moins difficile que le pre-
 mier. Je commencerai par l'examen de l'hypothèse $h = 1$.

§ XVIII. — *Examen de la solution correspondant à l'hypothèse $h = 1$.*

Nous savons que, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{aM}(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)}, \\ H_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_1M}(\rho - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)}, \\ H_2 &= \frac{1}{\sqrt{a_2M}(\rho - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)} \end{aligned}$$

et

$$(96) \quad \begin{cases} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(97) \quad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

Quant à la fonction M , elle satisfait d'abord aux trois équations

$$(98) \quad \begin{cases} x_{01}(\rho - \rho_1) = x_0 - x_1, \\ x_{12}(\rho_1 - \rho_2) = x_1 - x_2, \\ x_{20}(\rho - \rho_2) = x_0 - x_2, \end{cases}$$

déduites des formules (86) en y faisant $h = 1$.

Dans ce cas particulier, le système (98) peut être complètement intégré, et nous avons vu (§ XV) que la valeur la plus générale de M est de la forme

$$M = \frac{R}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)},$$

où chacune des fonctions R_i ne dépend que de la variable de même indice. Tout se réduit donc à la détermination des fonctions d'une seule variable R, R_1, R_2 .

Posons

$$(99) \quad N = R(\rho_1 - \rho_2) + R_1(\rho_2 - \rho) + R_2(\rho - \rho_1).$$

Les quantités H, H_1, H_2 prendront la forme plus simple

$$(100) \quad H = \frac{\rho_1 - \rho_2}{N\sqrt{a}}, \quad H_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{N\sqrt{a_1}}, \quad H_2 = \frac{\rho - \rho_1}{N\sqrt{a_2}}.$$

Si nous calculons les valeurs des quantités β , nous aurons

$$(101) \quad \begin{cases} \beta_{01} = \frac{\sqrt{a}}{N\sqrt{a_1}} [R'(\rho - \rho_2) + R_2 - R], \\ \beta_{10} = \frac{\sqrt{a_1}}{N\sqrt{a}} [R_1(\rho_2 - \rho_1) + R_1 - R_2], \end{cases}$$

et les formules analogues que l'on déduirait par des permutations circulaires. Par suite de la forme de N , les équations

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} \beta_{kj},$$

identiques aux formules (98), sont satisfaites, et il reste à vérifier les

trois équations telles que les suivantes :

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{21} \beta_{21} = 0.$$

En substituant les valeurs des quantités β , nous obtenons le résultat suivant :

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha' N}{2} [R'(\rho - \rho_2) + R_2 - R] + \alpha NR''(\rho - \rho_2) \\ - \alpha [R'(\rho - \rho_2) + R_2 - R] [R'(\rho_1 - \rho_2) + R_2 - R_1] \\ + \frac{\alpha' N}{2} [R'(\rho_2 - \rho_1) + R_1 - R_2] + \alpha_1 NR''_1(\rho_2 - \rho_1) \\ - \alpha_1 [R'(\rho_2 - \rho_1) + R_1 - R_2] [R'(\rho_1 - \rho_2) + R_2 - R_1] \\ + \alpha_2 [R'(\rho_2 - \rho_1) + R_1 - R_2] [R'_2(\rho_1 - \rho_2) + R_2 - R] = 0. \end{array} \right.$$

Pour trouver les valeurs de R , R_1 , R_2 pouvant satisfaire à une telle équation, prenons deux fois la dérivée par rapport à ρ , et deux fois la dérivée par rapport à ρ_1 . Nous aurons

$$\begin{aligned} R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left[\frac{\alpha'}{2} (\rho_2 - \rho) [R'(\rho - \rho_2) + R_2 - R] - \alpha R''(\rho - \rho_2)^2 + \alpha R'(\rho - \rho_2) + \alpha R_2 - \alpha R \right] \\ + R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \left[\frac{\alpha'}{2} (\rho_1 - \rho) [R'_1(\rho_2 - \rho_1) + R_1 - R_2] - \alpha_1 R''_1(\rho_1 - \rho_2)^2 - \alpha'_1 R'_1(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_1 R_2 - \alpha_1 R_1 \right] \\ + \alpha_2 R'' R'_1 = 0. \end{aligned}$$

Si nous remarquons que R_2 disparaît de cette équation et qu'en vertu des formules (94) on peut écrire

$$\alpha_2 R'' R'_1 = -R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [(m_1 \rho_2^2 + 2n_1 \rho_2 + p) R] - R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} [(m_1 \rho_2^2 + 2n_1 \rho_2 + p_1) R_1],$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\begin{aligned} R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left[-\frac{\alpha' R'}{2} (\rho - \rho_2)^2 + \frac{R \alpha'}{2} (\rho - \rho_2) - \alpha R''(\rho - \rho_2)^2 \right. \\ \left. + \alpha R'(\rho - \rho_2) - \alpha R + (m_1 \rho_2^2 + 2n_1 \rho_2 + p) R \right] \\ + R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \left[-\frac{\alpha'_1 R'_1}{2} (\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{R_1 \alpha'_1}{2} (\rho_1 - \rho_2) - \alpha_1 R''_1(\rho_1 - \rho_2)^2 \right. \\ \left. + \alpha_1 R'_1(\rho_1 - \rho_2) - \alpha_1 R_1 + (m_1 \rho_2^2 + 2n_1 \rho_2 + p_1) R_1 \right] = 0, \end{aligned}$$

42.

ou, en égalant à zéro les coefficients de ρ_2 , ρ_2^2 et le terme indépendant de ρ_2 ,

$$\begin{aligned} R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(-\frac{a'R'}{2} - aR'' + mR \right) + R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \left(-\frac{a'_1 R'_1}{2} - a_1 R_1'' + m_1 R_1 \right) &= 0, \\ R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(a'R'\rho - \frac{R a'}{2} + 2aR''\rho - aR' + 2nR \right) \\ &+ R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \left(a'_1 R'_1 \rho_1 - \frac{R_1 a'_1}{2} + 2a_1 R_1'' \rho_1 - a_1 R'_1 + 2n_1 R_1 \right) = 0, \\ R_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(-\frac{a'R'\rho^2}{2} + \frac{R a'\rho}{2} - aR''\rho^2 + aR'\rho - aR + \rho R \right) \\ &+ R'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \left(-\frac{a'_1 R'_1 \rho_1^2}{2} + \frac{R_1 a'_1 \rho_1}{2} - a_1 R_1'' \rho_1^2 + a_1 R'_1 \rho_1 - a_1 R_1 + \rho_1 R_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Or la forme de ces équations indique comment on pourra y satisfaire. Chacune d'elles, divisée par $R'' R_1''$, prend la forme

$$\omega(\rho) + \omega_1(\rho_1) = 0,$$

et, par des permutations circulaires, on aura de même

$$\omega_1(\rho_1) + \omega_2(\rho_2) = 0,$$

$$\omega_2(\rho_2) + \omega(\rho) = 0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$\omega(\rho) = \omega_1(\rho_1) = \omega_2(\rho_2) = 0.$$

On aura donc

$$103) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(-\frac{a'R'}{2} - aR'' + mR \right) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \left(a'R'\rho - \frac{R a'}{2} + 2aR''\rho - aR' + 2nR \right) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \left(-\frac{a'R'\rho^2}{2} + \frac{R a'\rho}{2} - aR''\rho^2 + aR'\rho - aR + \rho R \right) = 0, \end{cases}$$

et des formules semblables pour R_1, R_2 . En intégrant les équations

précédentes, on trouve

$$(104) \quad \begin{cases} mR - \frac{a'R'}{2} - aR'' = u, \\ a'R'\rho - \frac{Ra'}{2} + 2aR''\rho - aR' + 2nR = v, \\ -\frac{a'R'\rho^2}{2} + \frac{Ra'\rho}{2} - aR''\rho^2 + aR'\rho - aR + pR = w, \end{cases}$$

u, v, w désignant des polynômes en ρ du premier degré. En éliminant R'' entre les deux premières, on trouvera

$$\frac{a'R}{2} - aR' = 2u\rho + v,$$

et, en différenciant,

$$\frac{a''R}{2} - \frac{a'R'}{2} - aR'' = 2u + 2u'\rho + 2v'.$$

En retranchant de cette équation la première (104), on trouve

$$u + 2u'\rho + 2v' = 0,$$

ce qui exige que le polynôme u soit une constante. On est donc ainsi conduit à la solution la plus générale des équations (108)

$$(105) \quad \frac{a'R}{2} - aR' = \alpha\rho + \beta,$$

α et β étant deux constantes, d'où l'on déduit par différentiation

$$(106) \quad \frac{a''R}{2} - \frac{a'R'}{2} - aR'' = \alpha.$$

On pourrait intégrer l'équation (105), mais il m'a paru préférable de se servir des deux formules précédentes et des formules analogues

$$(107) \quad \begin{cases} \frac{a'_1 R_1}{2} - a_1 R'_1 = \alpha_1 \rho_1 + \beta_1, & \frac{a'_2 R_2}{2} - a_2 R'_2 = \alpha_2 \rho_2 + \beta_2, \\ \frac{a''_1 R_1}{2} - \frac{a'_1 R'_1}{2} - a_1 R''_1 = \alpha_1, & \frac{a''_2 R_2}{2} - \frac{a'_2 R'_2}{2} - a_2 R''_2 = \alpha_2, \end{cases}$$

pour éliminer de l'équation à vérifier (102) les dérivées premières et secondes des fonctions R, R_1, R_2 .

Après des calculs nécessairement un peu longs, et où l'on aura à faire usage des relations (97) entre les constantes, on trouvera la forme suivante :

$$(108) \left\{ \begin{aligned} & \frac{mp - n^2}{a} R^2 + \frac{m_1 p_1 - n_1^2}{a_1} R_1^2 + \frac{m_2 p_2 - n_2^2}{a_2} R_2^2 \\ & - (\alpha\rho + \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \beta + \beta_1 + \beta_2) \left(\frac{R_1 - R_2}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{R - R_2}{\rho - \rho_2} \right) \\ & + N \left(\frac{\alpha}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{\alpha_1}{\rho_2 - \rho} \right) - \frac{(\alpha\rho + \beta)^2}{a} - \frac{(\alpha_1\rho_1 + \beta_1)^2}{a_1} - \frac{(\alpha_2\rho_2 + \beta_2)^2}{a_2} \\ & + (\alpha\rho + \beta) \frac{\alpha' R}{a} + (\alpha_1\rho_1 + \beta_1) \frac{\alpha'_1 R_1}{a_1} + (\alpha_2\rho_2 + \beta_2) \frac{\alpha'_2 R_2}{a_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on effectue une permutation circulaire des indices et que l'on retranche l'équation ainsi obtenue de la précédente, on trouvera

$$N(\alpha\rho + \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \beta + \beta_1 + \beta_2) = N[\alpha\rho + \alpha_1\rho_1 - (\alpha + \alpha_1)\rho_2],$$

ce qui exige que l'on ait

$$(109) \quad \begin{cases} \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \beta + \beta_1 + \beta_2 = 0; \end{cases}$$

et en effet, si l'on introduit ces hypothèses, l'équation (108) prend la forme tout à fait symétrique

$$\begin{aligned} & \frac{mp - n^2}{a} R^2 + \frac{(\alpha\rho + \beta) \alpha' R}{a} - 2\alpha R + \frac{(\alpha\rho + \beta)^2}{a} \\ & + \frac{m_1 p_1 - n_1^2}{a_1} R_1^2 + \frac{(\alpha_1\rho_1 + \beta_1) \alpha'_1 R_1}{a_1} - 2\alpha_1 R_1 + \frac{(\alpha_1\rho_1 + \beta_1)^2}{a_1} \\ & + \frac{m_2 p_2 - n_2^2}{a_2} R_2^2 + \frac{(\alpha_2\rho_2 + \beta_2) \alpha'_2 R_2}{a_2} - 2\alpha_2 R_2 + \frac{(\alpha_2\rho_2 + \beta_2)^2}{a_2} = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que, les termes écrits sur chaque ligne dépendant de variables différentes, il faut que la somme de chaque ligne soit constante et que la somme des trois constantes soit nulle. En posant donc

$$(110) \quad \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

on aura

$$(111) \quad (mp - n^2)R^2 + 2R[(m\rho + n)(\alpha\rho + \beta) - \alpha x] + \alpha\gamma - (\alpha\rho + \beta)^2 = 0,$$

et des équations semblables pour R_1, R_2 .

Mais il est clair que tous les calculs reposent sur l'hypothèse que les équations (105), (107) soient vérifiées par R, R_1, R_2 . Il faut donc encore chercher si la condition pour la fonction R , déduite de la formule (111), de vérifier l'équation différentielle (105), n'impose pas de nouvelles limitations aux coefficients arbitraires. Or on déduit de l'équation (111)

$$R = \frac{\alpha\rho - n\beta + (n\alpha - m\beta)\rho}{mp - n^2} \pm \frac{1}{mp - n^2} \sqrt{\alpha} \sqrt{m\beta^2 - 2n\alpha\beta + p\alpha^2 - \gamma(mp - n^2)},$$

et l'on vérifie facilement que cette fonction R vérifie l'équation différentielle (105).

Les expressions de H, H_1, H_2, M sont donc complètement connues. En changeant les notations pour trouver le résultat final sous sa forme la plus simple, nous avons la proposition suivante :

Soient les fonctions a, a_1, a_2 définies par les équations

$$(112) \quad \begin{cases} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(113) \quad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0, \end{cases}$$

pour les coefficients. Il y aura un système orthogonal pour lequel on aura

$$(114) \quad ds^2 = \frac{1}{N^2} \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 d\rho^2}{a} + \frac{(\rho_2 - \rho)^2 d\rho_1^2}{a_1} + \frac{(\rho - \rho_1)^2 d\rho_2^2}{a_2} \right],$$

N étant défini par la formule

$$(115) \quad N = R(\rho_1 - \rho_2) + R_1(\rho_2 - \rho) + R_2(\rho - \rho_1),$$

R, R_1, R_2 étant trois fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , définies par les formules

$$116 \quad \begin{cases} R = \beta \rho - \alpha + \gamma \sqrt{a}, \\ R_1 = \beta_1 \rho_1 - \alpha_1 + \gamma_1 \sqrt{a_1}, \\ R_2 = \beta_2 \rho_2 - \alpha_2 + \gamma_2 \sqrt{a_2}, \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ désignent neuf constantes arbitraires, liées par les trois relations

$$117 \quad \begin{cases} m\alpha + n\beta + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + m_2\alpha_2 + n_2\beta_2 = 0, \\ n\alpha + p\beta + n_1\alpha_1 + p_1\beta_1 + n_2\alpha_2 + p_2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

et

$$118 \quad \begin{cases} (n^2 - mp)\gamma^2 + (n_1^2 - m_1p_1)\gamma_1^2 + (n_2^2 - m_2p_2)\gamma_2^2 \\ + m\alpha^2 + 2n\alpha\beta + p\beta^2 + m_1\alpha_1^2 + 2n_1\alpha_1\beta_1 \\ + p_1\beta_1^2 + m_2\alpha_2^2 + 2n_2\alpha_2\beta_2 + p_2\beta_2^2 = 0. \end{cases}$$

Il importe de remarquer que, lorsque la forme des fonctions a, a_1, a_2 a été déterminée, et que l'on connaît les constantes m_i, n_i, p_i , les formules qui donnent R_i ne contiennent au fond que sept constantes et non neuf; car, en vertu de l'identité,

$$(h\rho + k)(\rho_1 - \rho_2) + (h\rho_1 + k)(\rho_2 - \rho) + (h\rho_2 + k)(\rho - \rho_1) = 0,$$

on peut ajouter une même quantité, soit aux trois α , soit aux trois β , sans changer la valeur de N . On pourra supposer, par exemple, α et β nuls, et il restera sept constantes liées par trois relations, deux du premier degré, une du second.

Ce résultat est d'ailleurs conforme aux remarques du § XIII. Tous les systèmes obtenus en faisant varier N sont, comme nous l'avons vu, nécessairement les transformés les uns des autres; par inversion, N' étant l'une des valeurs de N , et x, y, z les coordonnées relatives à ce système, nous avons vu que la valeur la plus générale de N était de la forme

$$N = N' [a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2dz + e],$$

où a, b, c, d, e sont liés par la relation

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0.$$

L'expression la plus générale de N contient donc cinq constantes, liées

par une relation du second degré. C'est ce qui a lieu ici, si l'on se sert des deux équations du premier degré (117) pour éliminer deux constantes.

Pour donner plus de symétrie au calcul, nous allons supposer que, en remplaçant les paramètres ρ par des expressions de la forme $\frac{a\rho + b}{c\rho + a}$, on ait fait disparaître n et n_1 dans a et a_1 . Alors n_2 disparaîtra dans a_2 , et l'on aura

$$\begin{aligned} a &= m\rho^2 + p, \\ a_1 &= m_1\rho_1^2 + p_1, \\ a_2 &= m_2\rho_2^2 + p_2. \end{aligned}$$

On pourra résoudre les équations (117) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \lambda m_2, & \alpha_2 &= \alpha + \lambda m_1, \\ \beta_1 &= \beta + \mu p_2, & \beta_2 &= \beta - \mu p_1, \end{aligned}$$

λ, μ remplaçant les constantes $\alpha, \beta, \alpha_2, \beta_2$, et l'on aura

$$\begin{aligned} N &= \gamma(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a} + \gamma_1(\rho_2 - \rho)\sqrt{a_1} + \gamma_2(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2} \\ &+ \lambda(p\rho_1\rho_2 + p_1\rho\rho_2 + p_2\rho\rho_1) + \mu(m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2), \end{aligned}$$

les cinq constantes $\lambda, \mu, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ étant reliées par l'équation homogène

$$mp\gamma^2 + m_1p_1\gamma_1^2 + m_2p_2\gamma_2^2 + mm_1m_2\mu^2 + pp_1p_2\lambda^2 = 0.$$

Si l'on substitue à ces constantes les suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma\sqrt{mp}, & \gamma'_1 &= \gamma_1\sqrt{m_1p_1}, & \gamma'_2 &= \gamma_2\sqrt{m_2p_2}, \\ \sqrt{mm_1m_2}\mu + \sqrt{-pp_1p_2}\lambda &= \lambda', \\ \sqrt{mm_1m_2}\mu - \sqrt{-pp_1p_2}\lambda &= -\lambda', \end{aligned}$$

la fonction N prendra la forme

$$N = 2N'\gamma' + 2N'_1\gamma'_1 + 2N'_2\gamma'_2 + P\lambda' + Q\mu',$$

et la relation entre les constantes deviendra

$$\gamma'^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 - \lambda'\mu' = 0.$$

Si l'on applique ici la remarque du § XIII, on verra que le système

orthogonal est défini par les formules

$$x = \frac{N'}{P}, \quad y = \frac{N'_1}{P}, \quad z = \frac{N'_2}{P}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{Q}{P},$$

avec la valeur P attribuée à N dans l'expression de ds^2 .

Si l'on emploie les cinq coordonnées pentasphériques x_i , on aura les expressions plus symétriques

$$(119) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a}}{\sqrt{mp}}, & x_2 = \frac{(\rho_1 - \rho)\sqrt{a_1}}{\sqrt{m_1\rho_1}}, & x_3 = \frac{(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2}}{\sqrt{m_2\rho_2}}, \\ x_4 = \frac{m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2}{\sqrt{mm_1m_2}}, & x_5 = \frac{p\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho\rho_2 + \rho_2\rho\rho_1}{\sqrt{pp\rho_1\rho_2}}, \end{cases}$$

pour les cinq coordonnées.

Le système précédent est très-général, et son étude géométrique serait sans doute intéressante. Je me contenterai de faire remarquer qu'il comprend comme cas particulier un système isotherme imaginaire.

Supposons, en effet, que l'on réduise les trois polynômes a , a_1 , a_2 , qui sont en général du second degré, à des constantes dont la somme sera nulle. On verra facilement que l'on peut prendre

$$R = \rho^2, \quad R_1 = \rho_1^2, \quad R_2 = \rho_2^2,$$

et l'expression de M correspondante

$$M = \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{\rho_1^2}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}$$

se réduira à l'unité. Je n'insiste pas sur la recherche de ce système, qui est comprise comme cas particulier dans les recherches précédentes. Le système est imaginaire, parce que les constantes a , a_1 , a_2 , dont la somme est nulle, étant engagées sous des radicaux carrés, l'un au moins de ces radicaux sera imaginaire.

§ XIX. — Recherche de la solution correspondant à l'hypothèse $h = 2$.

Nous avons maintenant à examiner la solution pour laquelle $h = 2$. Nous savons que, dans ce cas, les fonctions a , a_1 , a_2 se réduisent à des

constantes dont la somme est nulle. On a

$$(120) \quad a + a_1 + a_2 = 0.$$

Nous supposerons en outre que l'on ait multiplié ces trois constantes de telle manière que leur produit soit égal à 1

$$(121) \quad aa_1a_2 = 1.$$

Cette hypothèse, qui remplace le système par un système semblable, a pour but de nous permettre de ne pas tenir compte de la modification que nous avons fait subir à M par la formule (84) et d'appliquer les formules précédemment obtenues. De plus, nous ne ferons aucune hypothèse au début sur h , afin que nos formules s'appliquent à l'examen d'un cas particulier de la dernière solution $h = \frac{1}{2}$, qui nous reste à examiner.

Ces points étant admis, les équations auxquelles satisfait la fonction M sont les suivantes :

$$(121) \quad \begin{cases} x_{01}(\rho - \rho_1) = h(x_0 - x_1), \\ x_{12}(\rho_2 - \rho_1) = h(x_2 - x_1), \\ x_{2n}(\rho - \rho_2) = h(x_2 - x_n), \end{cases}$$

et, en les employant, on peut mettre, quel que soit h , les équations qui donnent x_{00} , x_{11} , x_{22} sous une forme très-simple.

Introduisons la variable u définie par la formule

$$(122) \quad Mu = x_0^2 e^{-2R_1 - 2R_2} + x_1^2 e^{-2R - 2R_2} + x_2^2 e^{-2R - 2R_1}.$$

Les trois équations qui donnent x_{ii} pourront se mettre sous la forme très-simple

$$(123) \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = 2\alpha_0 x_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 2\alpha_1 x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = 2\alpha_2 x_2,$$

où l'on a posé, pour abrégier,

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\alpha_0 &= e^{-2R_1 - 2R_2} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho^2} - 3 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right] \\ &+ e^{-2R - 2R_2} \left[\frac{\partial^2 (R_1 - R)}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right] \\ &+ e^{-2R - 2R_1} \left[\frac{\partial^2 (R_1 - R)}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right]; \end{aligned} \right.$$

α_1, α_2 se déduiront de l'équation précédente par des permutations circulaires. La forme (123) sera valable toutes les fois que les fonctions $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ seront des constantes dont on aura ramené, en remplaçant le système par un système semblable, le produit à l'unité.

On a alors

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} L\alpha - 2L(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 &= \frac{1}{2} L\alpha_1 - 2L(\rho_2 - \rho), \\ R_2 &= \frac{1}{2} L\alpha_2 - 2L(\rho - \rho_1), \end{aligned}$$

et l'on trouve sans aucune difficulté les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Si l'on pose

$$(125) \quad \varpi = a(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2 + a_1(\rho_1 - \rho_2)^2(\rho_1 - \rho)^2 + a_2(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2\varpi(\rho_1 - \rho_2)^2 - 4a(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2, \\ \alpha_1 &= 2\varpi(\rho_2 - \rho)^2 - 4a_1(\rho_1 - \rho)^2(\rho_1 - \rho_2)^2, \\ \alpha_2 &= 2\varpi(\rho - \rho_1)^2 - 4a_2(\rho_2 - \rho)^2(\rho_2 - \rho_1)^2. \end{aligned}$$

Ces expressions sont, comme on voit, assez compliquées. Mais la forme si simple des formules (123) nous met sur la voie de plusieurs propriétés de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Ainsi l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{\partial(x_0 x_2)}{\partial \rho_1} = \frac{\partial(x_1 \alpha_1)}{\partial \rho}$$

ou

$$x_0 \frac{\partial x_0}{\partial \rho_1} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho} + (\alpha_0 - \alpha_1)x_{01} = 0,$$

et, comme cette équation doit être vérifiée par la fonction M , qui contient quatre constantes arbitraires, et dont les dérivées premières sont arbitraires, elle doit être identique à la première des équations (121), ce qui exige que l'on ait

$$(126) \quad \frac{\partial x_0}{\partial \rho_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial \rho_1}(\rho - \rho_1) + 2(\alpha_0 - \alpha_1) = 0.$$

En vertu de ces équations et de celles qu'on obtiendrait en permutant les indices, on reconnaît que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont les dérivées d'une même fonction ψ . On a

$$\alpha_0 = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad = \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2},$$

et cette fonction ψ vérifie les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \rho_1} (\rho - \rho_1) + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} (\rho_1 - \rho_2) + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \rho_2} (\rho - \rho_2) + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Cette fonction ψ , que nous ne calculerons pas, ne dépend que de $\rho - \rho_1, \rho - \rho_2$. On a donc, comme on peut le vérifier,

$$(127) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Nous désignerons les dérivées premières de ψ par α_i et les dérivées secondes par α_{ij} . On déduit de la relation précédente

$$(128) \quad \alpha_{01} + \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0.$$

Ces remarques préliminaires étant faites, nous pouvons effectuer d'une manière assez simple l'intégration des équations qui donnent M et qui sont les six équations (121), (123).

Toutes les valeurs de M correspondant à des systèmes qui sont les inverses les uns des autres, il suffira évidemment de trouver une seule valeur de M. A cet effet, nous chercherons s'il existe une valeur de M qui ne dépende que de $\rho - \rho_1, \rho - \rho_2$, et pour laquelle on ait, par conséquent,

$$(129) \quad x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Dans ce cas, la fonction que nous avons désignée par u ne dépendra, elle aussi, que des différences de ρ, ρ_1, ρ_2 , et l'on aura par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = 0,$$

ou

$$(130) \quad x_0 \alpha_0 + x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = 0.$$

Les équations (130), (129) définissent les rapports des dérivées de

M, et l'on peut poser

$$(131) \quad \begin{cases} x_0 = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2), \\ x_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha), \\ x_2 = \lambda(\alpha - \alpha_1), \end{cases}$$

λ étant une fonction à déterminer.

Calculons, au moyen de la première de ces formules, x_{01} , et substituons la valeur ainsi trouvée, ainsi que celles de x_0 , x_1 , dans la première des équations (121). Nous aurons

$$\lambda(\rho - \rho_1)(\alpha_{11} - \alpha_2) + (\rho - \rho_1) \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\lambda(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\alpha_2).$$

Si nous éliminons α_{11} au moyen de la formule (128), et si nous employons les formules (126), nous trouverons

$$\frac{\partial \lambda}{\lambda \partial \rho_1} = -\frac{4}{\rho_1 - \rho} - \frac{4}{\rho_1 - \rho_2}.$$

On aura de même

$$\frac{\partial \lambda}{\lambda \partial \rho_2} = -\frac{4}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{4}{\rho_2 - \rho},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\lambda \partial \rho} = -\frac{4}{\rho - \rho_1} - \frac{4}{\rho - \rho_2}.$$

Ces formules ne sont pas incompatibles, et elles nous donnent

$$\lambda = \frac{C}{(\rho - \rho_1)^4 (\rho_1 - \rho_2)^4 (\rho_2 - \rho)^4}.$$

Nous poserons, pour abrégier,

$$(132) \quad \zeta = (\rho - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho),$$

et nous aurons

$$(133) \quad \lambda = \frac{C}{\zeta^4}.$$

Avec cette valeur de λ , les dérivées de M définies par les formules (131) sont déterminées, et l'on trouve facilement

$$dM = \frac{2C}{\zeta^4} (\zeta d\omega - 3\omega d\zeta),$$

ou, en intégrant,

$$M = 2C \frac{\omega}{\zeta^2} + 2C_1.$$

Cette valeur satisfait aux équations (121). En exprimant qu'elle doit satisfaire aux équations (123), on trouve

$$C_1 = 0.$$

On a donc, en posant $2C = 1$, ce qui ne fait que remplacer le système par un système semblable,

$$(134) \quad M = \frac{\omega}{\zeta^2},$$

ce qui donne, pour le système orthogonal correspondant, l'expression

$$(135) \quad ds^2 = \frac{\zeta^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{a} \frac{d\rho^2}{(\rho - \rho_1)^2 (\rho - \rho_2)^2} + \frac{1}{a_1} \frac{d\rho_1^2}{(\rho_1 - \rho)^2 (\rho_1 - \rho_2)^2} + \frac{1}{a_2} \frac{d\rho_2^2}{(\rho_2 - \rho)^2 (\rho_2 - \rho_1)^2} \right],$$

ou

$$(136) \quad ds^2 = \frac{\zeta^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{a} (\rho_1 - \rho_2)^2 d\rho^2 + \frac{1}{a_1} (\rho_2 - \rho)^2 d\rho_1^2 + \frac{1}{a_2} (\rho - \rho_1)^2 d\rho_2^2 \right],$$

avec la condition

$$a + a_1 + a_2 = 0.$$

Il resterait à trouver les coordonnées x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 . Ce calcul assez long, qui exigerait l'intégration de six nouvelles équations aux dérivées partielles, peut être évité par l'emploi de l'artifice suivant :

Si, dans l'expression (135) de ds^2 , on remplace chacune des variables ρ_i par $\frac{1}{(\rho_i + h)}$, on aura pour ds^2 une forme toute semblable, dans laquelle le multiplicateur seul $\frac{1}{M^2} = \frac{\zeta^2}{\omega^2}$ sera changé et multiplié par $(\rho + h)^4 (\rho_1 + h)^4 (\rho_2 + h)^4$. Il suit de là que, si l'on effectue, dans l'expression de M (134), la même substitution, et si l'on divise le résultat obtenu par $(\rho + h)^2 (\rho_1 + h)^2 (\rho_2 + h)^2$, on aura une nouvelle solution M' contenant une constante arbitraire h . On trouve ainsi

$$(137) \quad M' = \frac{a(\rho - \rho_1)^2 (\rho - \rho_2)^2 (\rho_1 + h)^2 (\rho_2 + h)^2}{\zeta^2} + \dots,$$

les deux termes non écrits se déduisent du premier par des permutations d'indices.

Or toute nouvelle solution pour M est de la forme

$$kM[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2],$$

a, b, c, k étant des constantes convenablement choisies, et x, y, z les valeurs des coordonnées correspondant à la valeur M . Il suit de là que, si l'on pose, en ordonnant, par rapport à h , la valeur de M' ,

$$\frac{M'}{M} = h^4 + Ph^3 + Qh^2 + Rh + S;$$

P, Q, R, S seront des fonctions linéaires de $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$.

On a

$$138. \quad \left\{ \begin{array}{l} M\zeta = \frac{a}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \frac{a_1}{(\rho_2 - \rho)^2} + \frac{a_2}{(\rho - \rho_1)^2}, \\ MP\zeta = \frac{a(\rho_1 + \rho_2)}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \dots, \\ MQ\zeta = \frac{a\rho_1\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \dots, \\ MR\zeta = \frac{a\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2)}{(\rho_1 - \rho)^2} + \dots, \\ MS\zeta = \frac{a\rho_1^2\rho_2^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \dots \end{array} \right.$$

P, Q, R, S étant des fonctions linéaires de $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$, il faut qu'il y ait une relation du second degré entre ces quatre quantités. Nous allons d'abord chercher cette relation.

Introduisons la fonction Q' définie par l'égalité

$$Q' = 4Q,$$

ou

$$4MQ\zeta = \frac{4a\rho_1\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = \dots = \frac{a(\rho_1 + \rho_2)^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \dots = MQ'\zeta.$$

On établira facilement la relation

$$(MP\zeta)(MR\zeta) - (MQ\zeta)(MQ'\zeta) = M\zeta(MS\zeta) - (MQ\zeta)^2,$$

ou

$$PR - 4Q^2 = S - Q^2,$$

ou

$$S = PR - 3Q^2;$$

ce qu'on peut écrire

$$S = \left(\frac{P+R}{2}\right)^2 + \left(\frac{i(P-R)}{2}\right)^2 + (Q\sqrt{-3})^2.$$

La forme de cette identité nous montre que l'on a, k désignant une constante,

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = k \frac{P+R}{2}, \quad y = k \frac{i(P-R)}{2}, \quad z = kQ\sqrt{-3}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = Sh^2. \end{array} \right.$$

Telles sont les expressions des coordonnées du système cherché.

On voit que, si l'on voulait avoir des surfaces réelles, il faudrait remplacer y, z par iy, iz , et la formule (135) donnerait, pour les surfaces ainsi obtenues, non plus ds^2 , mais

$$dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

§ XX. — *Indications sur la solution correspondante à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$.*

Il ne nous reste plus qu'à traiter la quatrième solution $h = \frac{1}{2}$, pour laquelle les fonctions a, a_1, a_2 sont les valeurs, pour ρ, ρ_1, ρ_2 , d'un même polynôme du troisième degré. Les trois équations qui déterminent M deviennent ici

$$(140) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{01}(\rho - \rho_1) = \frac{1}{2}(x_0 - x_1), \\ x_{12}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \\ x_{20}(\rho - \rho_2) = \frac{1}{2}(x_0 - x_2), \end{array} \right.$$

et l'on ne peut les intégrer qu'en employant des intégrales définies assez compliquées.

Pour me rendre compte de la nature de la solution finale, j'ai

commencé par étudier le cas où les trois polynômes a , a_1 , a_2 se réduisent à une même constante, qu'on peut alors supposer égale à l'unité. Même dans ce cas si simple, la valeur de M ne peut être obtenue que par le moyen des intégrales elliptiques.

Dans cette hypothèse, les formules (123) du paragraphe précédent s'appliquent encore, et, en calculant les valeurs de α_0 , α_1 , α_2 , on trouve

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{4};$$

les équations (123) deviennent donc

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{4}x_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{4}x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = -\frac{1}{4}x_2,$$

et elles sont immédiatement intégrables. On obtient ainsi l'équation du premier ordre

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)x_0^2 + (\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)x_1^2 \\ + (\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)x_2^2 - \frac{1}{4}M^2 + 2CM = 0, \end{array} \right.$$

qu'il faudra combiner avec les équations (140). Cherchons s'il y aura une solution commune ne dépendant que de $\rho - \rho_1$, $\rho - \rho_2$, et pour laquelle on aura, par conséquent,

$$(142) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 = 0, \\ x_{00} + x_{10} + x_{20} = 0. \end{array} \right.$$

Différentions l'équation (141), et remplaçons x_{00} , x_{01} , x_{02} par leurs valeurs déduites des équations (142), (140). Nous aurons

$$-\frac{M}{2} + 2C - \rho x_0 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_2 = 0.$$

Si de cette équation nous tirons M pour le porter dans l'équation (141), et que nous tenons compte de l'équation (142) entre les dérivées premières, il restera

$$C = 0.$$

Ainsi une au moins des valeurs de M satisfera aux deux équations

$$-\frac{M}{2} = \rho x_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2,$$

$$0 = x_0 + x_1 + x_2,$$

dont la première exprime que M est homogène et de degré $-\frac{1}{2}$. Prenons

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \varphi \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2} \right),$$

ou, en posant $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2} = t$,

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \varphi(t).$$

En portant cette valeur de M dans l'une quelconque des équations (140), on trouvera pour φ l'équation

$$(143) \quad (t^2 - t)\varphi'' - (1 - 2t)\varphi' + \frac{\varphi}{4} = 0.$$

Or cette équation est bien connue : c'est celle à laquelle satisfait l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-tx)}}.$$

On aura donc pour M la valeur

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x) \left(1 - x \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_2}\right)}},$$

à laquelle on peut donner la forme beaucoup plus élégante

$$(144) \quad M = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-\rho)(x-\rho_1)(x-\rho_2)}}.$$

On aperçoit donc deux solutions pour M , la précédente et celle qu'on en déduirait en remplaçant la limite ρ_2 de l'intégrale par ρ .

L'examen de ce cas particulier et la forme qu'on peut donner à une intégrale assez complète du système (140),

$$M = \int \frac{\varpi(a) da}{\sqrt{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}},$$

me portent à penser que, dans le cas général, on aura encore des intégrales elliptiques; mais, assuré de ne pas obtenir un système algébrique, je n'ai pas cherché à compléter la solution.

Le 2 mars 1877.

SUR LES COURBES

DUES A LA COEXISTENCE

DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES PERPENDICULAIRES,

PAR M. A. TERQUEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

PREMIÈRE PARTIE.

PRÉLIMINAIRES.

Les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires ont été étudiées par MM. Lissajous et Melde. Le premier physicien, auquel on doit le moyen de les produire facilement à l'aide de diapasons munis de miroirs, a indiqué les propriétés principales de ces courbes.

M. Melde, dans l'ouvrage *die Lehre von den Schwingungscurven* (Leipzig, 1864), a repris cette étude, et l'a étendue aux courbes dues à la coexistence de deux mouvements elliptiques ou d'un mouvement elliptique et d'un mouvement rectiligne. Pour étudier les propriétés géométriques des premières courbes, il est plus commode de conserver les deux équations qui représentent les mouvements composants, et de prendre par suite, comme variable auxiliaire, le temps.

Ces équations sont, comme l'on sait, les suivantes :

$$(1) \quad x = a \cos 2\pi m (t + \delta),$$

$$(2) \quad z = b \cos 2\pi nt.$$

L'une des molécules exécute m vibrations suivant l'axe des x , et l'autre n suivant l'axe des z , perpendiculaire au premier, pendant un certain intervalle de temps que l'on prend pour unité. La forme de la

courbe que décrit une molécule possédant ces deux mouvements simultanés dépend des trois quantités m , n et δ , la différence de phase δ variant au maximum de 0 à $\frac{1}{m}$. M. Lissajous a en outre fait remarquer que l'on peut remplacer l'un des deux mouvements pendulaires, celui que représente l'équation (1), par exemple, par un mouvement de rotation uniforme sur une circonférence de rayon a . On sait, en effet, que si une molécule se meut sur une circonférence d'un mouvement uniforme, sa projection sur un diamètre quelconque possède un mouvement pendulaire; la molécule devra donc, dans le cas actuel, décrire m circonférences dans l'unité de temps; l'arc γ parcouru pendant le temps t sera exprimé par

$$(3) \quad \gamma = 2\pi m a (t + \delta).$$

L'autre mouvement pendulaire concomitant, $z = b \cos 2\pi n t$, s'exécutera suivant la perpendiculaire au plan de la circonférence menée par le centre de cette dernière. On peut admettre, pour trouver le mouvement résultant, que le mouvement oscillatoire a lieu suivant les génératrices du cylindre ayant la circonférence $2\pi a$ pour base; par suite la molécule vibrante, pendant l'unité de temps, fait m fois le tour du cylindre, tout en exécutant n oscillations sur sa surface (1). On obtient ainsi une courbe tracée sur la surface du cylindre, que je désignerai sous le nom de *courbe cylindrique*, et dont la projection sur un des plans diamétraux du cylindre reproduit la courbe plane due à la composition des deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Grâce à cette construction, on peut éliminer, ainsi que l'a fait remarquer M. Lissajous, l'influence due à la différence de phase δ ; la forme de la courbe cylindrique ne dépend plus absolument que des valeurs de m et de n , c'est-à-dire des nombres des vibrations simultanées.

On pourra obtenir, en effet, en projection toutes les courbes planes correspondant aux diverses valeurs de δ , soit en laissant le cylindre

(1) Dans tout le reste de ce travail, la lettre m indiquera le nombre des oscillations exécutées suivant l'axe des x , ou le nombre de rotations suivant la circonférence de la base du cylindre, et n le nombre d'oscillations effectuées suivant l'axe des z ou à la surface du cylindre.

immobile et faisant tourner le plan de projection, soit en laissant ce dernier plan immobile et faisant tourner le cylindre.

On pourra donc, pour trouver l'équation de la courbe cylindrique, poser $\delta = 0$. Si l'on suppose déroulée la surface latérale du cylindre, l'équation de cette courbe devient, en remplaçant t par sa valeur,

$$(4) \quad z = b \cos 2\pi \frac{n\gamma}{m \cdot 2\pi a},$$

ou encore

$$z = b \cos 2\pi \frac{n\gamma}{ml},$$

en posant $2\pi a = l$, longueur de la circonférence de base du cylindre.

Pour construire cette courbe, il suffirait de construire n fois la courbe sinusoïdale :

$$z = b \cos 2\pi \frac{\gamma}{c},$$

avec $c = \frac{ml}{n}$, sur une surface plane indéfinie, puis d'enrouler cette surface avec la courbe tracée sur la surface du cylindre; les diverses portions de cette courbe se couperont en formant nécessairement une courbe fermée, puisque ces n sinusoïdes sont tracées sur une surface égale à m fois celle du cylindre.

Des propriétés de cette courbe cylindrique on peut déduire plus simplement, que par l'emploi des équations (1) et (2), un certain nombre des propriétés des courbes planes résultant de la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Il faut donc, dans ce but, chercher l'équation de la courbe tracée sur la surface déroulée du cylindre, ou sur cette surface même, en prenant comme coordonnées des portions de génératrices (z) et des arcs de cercles (γ). L'équation de la courbe ainsi tracée sur la surface déroulée indéfinie est celle d'une simple sinusoïde, c'est-à-dire

$$(5) \quad z = b \cos 2\pi \frac{n\gamma}{ml}.$$

Supposons que l'on mène des parallèles à l'axe des z , à des distances l ,

$2l, 3l, \dots, (m-1)l, ml$ (¹). La courbe représentée par l'équation (5) est divisée ainsi en m parties, et chacune de celles-ci représente une des portions de la courbe enroulée sur la surface du cylindre. Il suffira, pour avoir l'équation de chacune de ces parties isolément, de changer son équation, de telle sorte que y n'y varie plus que de 0 à l .

L'équation de la première partie est donc

$$z_1 = b \cos 2\pi \frac{ny}{ml};$$

celle de la deuxième partie (on remplace y par $y + l$),

$$z_2 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{n}{m} \right);$$

celle de la troisième partie devient, par la substitution de $y + 2l$ à y ,

$$z_3 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{2n}{m} \right),$$

.....

et celle de la $m^{\text{ième}}$ partie sera

$$z_m = b \cos 2\pi \left[\frac{ny}{ml} + \frac{(m-1)n}{m} \right].$$

L'équation générale de la courbe tracée sur la surface du cylindre sera donc

$$(6) \quad (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_m) = 0,$$

y variant dans les $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, seulement de 0 à l ; si y , du reste, varie au delà de l , on retombe sur des valeurs de z déjà trouvées.

Je me propose, dans ce travail, d'étudier les propriétés principales des courbes cylindriques représentées par l'équation (6), d'en déduire les propriétés des courbes planes obtenues en projetant les premières sur divers plans diamétraux du cylindre, et enfin de donner la description d'un appareil de démonstration, permettant de vérifier expérimentalement les déductions de la théorie.

(¹) l est égal, comme on l'a vu, à $2\pi a$, longueur de la circonférence de la base du cylindre.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES CYLINDRIQUES.

Les valeurs des $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, qui entrent dans l'équation (6), peuvent être simplifiées; en effet, dans les nombres fractionnaires, tels que $\frac{pn}{m}$ (n et m étant premiers entre eux, et p un nombre quelconque inférieur à m), on peut supprimer la partie entière et ne conserver que la partie fractionnaire; on sait, en outre, que si l'on multiplie une fraction irréductible ou un nombre fractionnaire $\frac{n}{m}$ par les nombres successifs $1, 2, 3, \dots, m - 1$, les restes de la division sont égaux à ces mêmes nombres rangés dans un autre ordre.

On pourra donc conserver l'équation (6),

$$(6) \qquad (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_m) = 0,$$

pour représenter la courbe cylindrique; seulement les quantités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, ont les valeurs suivantes :

$$z_1 = b \cos 2\pi \frac{ny}{ml} = b \cos 2\pi \frac{y}{c},$$

$$z_2 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{1}{m} \right) = b \cos 2\pi \left(\frac{y}{c} + \frac{1}{m} \right),$$

$$z_3 = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{2}{m} \right) = b \cos 2\pi \left(\frac{y}{c} + \frac{2}{m} \right),$$

.....

$$z_m = b \cos 2\pi \left(\frac{ny}{ml} + \frac{m-1}{m} \right) = b \cos 2\pi \left(\frac{y}{c} + \frac{m-1}{m} \right).$$

La courbe représentée par l'équation (6) jouit de certaines propriétés générales, quels que soient m et n ; d'autres propriétés particulières, au contraire, varient suivant que m et n sont pairs ou impairs.

THÉORÈME I. — *Si la molécule vibrante fait n oscillations sur la surface du cylindre parallèlement à l'axe de ce dernier, la courbe résultante*

est formée de n parties identiques, quel que soit le nombre m de rotations exécutées pendant le même temps.

Si, en effet, dans l'équation (6), on y remplace y par $y + \frac{kl}{n}$, k étant un nombre inférieur à n , les quantités constantes ajoutées à la partie variable $\frac{ny}{mt}$, dans les quantités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, que je désignerai désormais par le signe z_i , deviennent $\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}, \frac{k+2}{m}, \dots, \frac{k+m-1}{m}$.

Si k est inférieur à m , on peut poser $k+p=m$, et les restes des divisions sont $k, k+1, \dots, m-1, 0, 1, 2, \dots, k-1$, identiques, sauf l'ordre, aux numérateurs des fractions qui figurent dans les z_i . Si k est supérieur à m , on peut écrire $k=mr+q$, supprimer le produit mr et ne garder que q , ce qui ramène au cas précédent.

L'équation (6) ne changeant pas quand on remplace y par $y + \frac{kl}{n}$, les valeurs de z sont par suite les mêmes pour $y, y + \frac{l}{n}, y + \frac{2l}{n}, \dots, y + \frac{(n-1)l}{n}$; la courbe que représente cette équation étant formée de n parties identiques, il suffira donc, dans l'équation (6), de faire varier y de 0 à $\frac{l}{n}$ pour avoir l'élément constitutif de la courbe cylindrique, puisque cette figure se trouve répétée n fois sur la surface du cylindre.

Comment construire facilement cette *figure élémentaire*? Dans l'équation (6) ou dans les z_i je pose $c = \frac{ml}{n}$; comme il suffit, ainsi qu'on l'a vu, de faire varier y de 0 à $\frac{l}{n}$, pour avoir ce que j'ai appelé la *figure élémentaire*, cela revient à faire varier cette quantité de 0 à $\frac{c}{m}$, puisque $\frac{l}{n} = \frac{c}{m}$. Or c est la base de la sinusoïde primitive à tracer sur la surface indéfinie du cylindre développé.

On obtiendra donc la figure que représente l'équation (6), quand y varie de 0 à $\frac{l}{n}$ ou à $\frac{c}{m}$, en traçant une sinusoïde quelconque $z = b \cos 2\pi \frac{y}{c}$, coupant la courbe en m parties par des parallèles à l'axe des z équidistantes et faisant glisser les divers tronçons de courbe

ainsi obtenus, de manière à les reporter tous entre deux droites parallèles à l'axe des z , séparées par un intervalle égal à $\frac{c}{m}$.

Ainsi, en résumé, le nombre de rotations m exécutées par la molécule vibrante pendant l'unité de temps détermine la forme de la *figure élémentaire* ou de l'*élément constitutif* de la courbe cylindrique, quel que soit le nombre d'oscillations exécutées à la surface du cylindre. Ce nombre d'oscillations n indique combien de fois cette figure élémentaire doit être répétée à la surface du cylindre, quel que soit le nombre m des rotations simultanées. Les *fig.* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (*Pl. I*) représentent les figures élémentaires correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 rotations, quel que soit le nombre des oscillations; évidemment les paramètres de la sinusoïde choisie sont complètement arbitraires, et ne changent rien à la forme générale.

THÉORÈME II. — *Dans la figure élémentaire, la parallèle à l'axe des z menée par le milieu est un axe de symétrie.*

Si, en effet, on a, d'une manière générale, deux arcs de courbe symétriques par rapport à une certaine droite, la symétrie subsistera encore si l'on fait glisser ces deux arcs de quantités égales vers cette droite, même si on la dépasse. Or, à cause de la symétrie de la sinusoïde (*fig.* 1), par rapport à la ligne CD, les m tronçons de courbe provenant de la division de la sinusoïde en m parties sont et resteront dans des positions symétriques par rapport à cette ligne CD, si on les fait glisser parallèlement à la ligne EFGHI, de manière que tous se trouvent compris entre deux droites menées de part et d'autre de CD, à des distances égales à $\frac{c}{2m}$; c'est ainsi, en effet, qu'on pourrait procéder à la construction de la figure élémentaire.

Si, du reste, dans l'équation (6), on remplace y successivement par $\frac{l}{2n} + y_1$ et $\frac{l}{2n} - y_1$, on trouve pour z la même valeur.

THÉORÈME III. — *Les parallèles AB, A₁B₁, à l'axe des z qui limitent la figure élémentaire sont des axes de symétrie, quand celle-ci est répétée plusieurs fois, ou même si, n étant égal à 1, elle se trouve tracée sur la surface du cylindre.*

Cela résulte de ce que chaque figure élémentaire est formée de deux

parties symétriques par rapport à une parallèle à l'axe des z . On démontre du reste que, dans l'équation (6), z conserve la même valeur quand on change y en $-y$.

THÉORÈME IV. — *Si m est pair, la figure est symétrique par rapport à l'axe des y .*

En effet, si m est pair (*Pl. I, fig. 1*), CD étant un axe de symétrie de la sinusoïde, les points de division de la ligne EI, dans chacune des moitiés EG et GI, tombent à la même distance des points E et G. Si l'on fait tourner la courbe DHA, de 180 degrés autour de EI, elle devient la courbe CHB, identique à AFD. On peut admettre, comme on l'a vu précédemment, que l'on forme la figure demandée en faisant glisser les divers tronçons de courbes parallèlement à EI, jusqu'à ce que le milieu de chacun se trouve sur CD; les divers tronçons de courbe provenant de CHB, se superposeront aux tronçons correspondants de AFD; si donc on effectue ensuite la rotation inverse de celle qui a été faite primitivement, ces derniers deviennent les symétriques de ceux avec lesquels ils coïncidaient. On peut démontrer du reste que, dans l'équation (6), les z_i sont égaux deux à deux et de signes contraires.

Les lignes CD, AB, A₁B₁ étant, dans les *fig. 2, 4, 6, 8*, des axes de symétrie ainsi que la ligne EF, les points d'intersection E, F et G sont des centres.

THÉORÈME V. — *Si m est impair, l'axe des y n'est plus un axe de symétrie; mais il y a, sur l'axe des y et dans chaque figure, des centres aux points $y = \frac{c}{4m}$ et $y = \frac{3c}{4m}$.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que si, dans l'équation (6), pour $y = \frac{c}{4m} + y_1$, on a $z = z_1$, pour $y = \frac{c}{4m} - y_1$, on aura $z = -z_1$.

Posons, pour abrégé, $\frac{2\pi y_1}{c} = \varphi$; les arcs dont on aura à prendre les cosinus pour avoir la valeur des z_i seront, pour $y = \frac{c}{4m} + y_1$,

$$\varphi + \frac{\pi}{2m}, \quad \varphi + \frac{5\pi}{2m}, \quad \varphi + \frac{9\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \varphi + \frac{(4m-3)\pi}{2m}.$$

Les coefficients de la fraction $\frac{\pi}{2m}$ sont donc 1, 5, 9, ..., $4m - 3$, de la forme $4p + 1$, p variant de 0 à $m - 1$.

Si m est impair et égal à $2m' + 1$, on trouvera parmi ces nombres $4m' + 1 = 2m - 1$, et $4m' + 5 = 2m + 3$. Les arcs précédents peuvent donc être séparés en deux séries, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \varphi + \frac{\pi}{2m}, \quad \varphi + \frac{5\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \varphi + \frac{(2m-1)\pi}{2m}, \\ & \varphi + \pi + \frac{3\pi}{2m}, \quad \varphi + \pi + \frac{7\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \varphi + \pi + \frac{(2m-3)\pi}{2m}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{c}{4m} + y_i$ par $\frac{c}{4m} - y_i$, ce qui revient à changer seulement y_i en $-y_i$, ou φ en $-\varphi$, les arcs précédents deviennent

$$\begin{aligned} & -\varphi + \frac{\pi}{2m}, \quad -\varphi + \frac{5\pi}{2m}, \quad \dots, \quad -\varphi + \frac{(2m-1)\pi}{2m}, \\ & -\varphi + \pi + \frac{3\pi}{2m}, \quad -\varphi + \pi + \frac{7\pi}{2m}, \quad \dots, \quad -\varphi + \pi + \frac{(2m-3)\pi}{2m}. \end{aligned}$$

Si l'on retranche les arcs de la première moitié de π , et ceux de la deuxième moitié de 3π , on aura

$$\begin{aligned} & \varphi + \frac{(2m-1)\pi}{2m}, \quad \varphi + \frac{(2m-5)\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \varphi + \frac{\pi}{2m}, \\ & \varphi + \pi + \frac{(2m-3)\pi}{2m}, \quad \varphi + \pi + \frac{(2m-7)\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \varphi + \pi + \frac{3\pi}{2m}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, dans un autre ordre, les arcs obtenus pour $y = \frac{c}{4m} + y_i$.

Les cosinus des arcs correspondant à $y = \frac{c}{4m} - y_i$ seront donc égaux et de signes contraires à ceux que l'on obtient en posant $y = \frac{c}{4m} + y_i$.

Les z_i pour ces deux valeurs de y étant égaux et de signes contraires, il en sera évidemment de même pour les valeurs de z . Le point $(z = 0, y = \frac{c}{4m})$ est donc un centre; il en sera de même pour le point $(z = 0, y = \frac{3c}{4m})$, à cause de l'axe de symétrie qui passe par le

milieu de la figure. On peut vérifier ce théorème sur les *fig.* 1, 3, 5 et 7.

THÉORÈME VI. — *Valeurs de z pour $y = 0$ et $y = \frac{c}{2m}$.*

Supposons m pair. — Les arcs dont on aura à prendre les cosinus pour avoir les valeurs de z correspondant à $y = 0$ seront les suivants : $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$.

Admettons que $m = 2m'$, on pourra diviser par 2, et l'on aura ainsi :

$$0, \frac{\pi}{m'}, \frac{2\pi}{m'}, \dots, \frac{(m'-1)\pi}{m'}, \frac{m'\pi}{m'}, \frac{(m'+1)\pi}{m'}, \dots, \\ \frac{(2m'-2)\pi}{m'}, \frac{(2m'-1)\pi}{m'}.$$

On peut grouper ces arcs de la manière suivante :

$$0 \left| \frac{\pi}{m'}, 2\pi - \frac{\pi}{m'} \right| \frac{2\pi}{m'}, 2\pi - \frac{2\pi}{m'} \left| \dots \right| \pi - \frac{\pi}{m'}, \pi + \frac{\pi}{m'} \left| \pi \right|.$$

Il y aura deux points par lesquels il ne passe qu'une seule courbe correspondant aux arcs 0 et π ; tous les autres seront l'intersection de deux courbes ou des points doubles, puisque l'on a deux arcs différents dont les cosinus sont égaux; par suite il y a deux points simples $z = \pm b$, et $\frac{m}{2} - 1$ points doubles, correspondant aux intersections des diverses portions de courbes.

On n'aura à prendre que les cosinus des arcs

$$0, \frac{\pi}{m'}, \frac{2\pi}{m'}, \dots, \frac{(m'-1)\pi}{m'}, \pi.$$

Les cosinus de ces arcs sont égaux deux à deux et de signes contraires, ce qu'il était facile de prévoir, vu la symétrie de la figure par rapport à la ligne EF; de plus, si $\frac{m}{4}$ est un nombre entier, c'est-à-dire si m est doublement pair, le point $z = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ se trouvera sur la ligne EF; il ne s'y trouvera pas si m est simplement pair.

Pour $y = \frac{c}{2m}$, on aura pour z les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \frac{5\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m},$$

qu'on peut grouper de la manière suivante :

$$\frac{\pi}{m}, \quad 2\pi - \frac{\pi}{m} \quad \left| \quad \frac{3\pi}{m}, \quad 2\pi - \frac{3\pi}{m} \quad \right| \quad \dots$$

Tous les points seront donc doubles, c'est-à-dire l'intersection de deux courbes; ces points correspondent du reste au milieu des arcs dans lesquels la sinusoïde a été décomposée.

En s'arrêtant au milieu, puisque m est supposé pair, on devra prendre les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{5\pi}{m}, \quad \dots, \quad \frac{(m-3)\pi}{m}, \quad \frac{(m-1)\pi}{m},$$

cosinus égaux deux à deux et de signes contraires; le nombre des valeurs de z est égal à $\frac{m}{2}$.

Si m est doublement pair, on n'aura pas $z = 0$; si m est simplement pair, on aura $z = \cos \frac{m\pi}{2m} = 0$, parmi ces valeurs.

En résumé, s'il y a m rotations, *et que m soit pair*, il y a dans chaque figure élémentaire, *sur l'axe de symétrie AB (fig. 2, 4, 6, 8), deux points simples* correspondant aux maxima $z = \pm b$, et $\frac{m}{2} - 1$ *points doubles* ou *intersections des diverses branches de courbes*; *sur l'axe CD* il y a $\frac{m}{2}$ *intersections*, ce qui donne, en somme, dans chaque figure élémentaire, $(m - 1)$ *intersections sur les lignes AB et CD*. Si m est doublement pair, le point $z = 0$ se trouve sur la droite AB; si m est simplement pair, ce point $z = 0$ se trouve sur la droite CD.

Supposons m impair. — Pour $y = 0$, on a, comme précédemment, à prendre, pour avoir les valeurs de z , les cosinus des arcs

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \dots, \quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Sauf pour l'arc 0, tous les autres points sont doubles, c'est-à-dire que par chacun d'eux passent deux courbes; on devra donc s'arrêter au milieu, et ne prendre que les arcs

$$0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)\pi}{m},$$

ce qui donne un point simple $z = b$, et $\frac{m-1}{2}$ points doubles.

Pour $y = \frac{c}{2m}$, les arcs dont on prendra les cosinus seront $\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \frac{5\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$; tous ces points sont doubles, sauf celui qui correspond à l'arc placé au milieu de la série; on n'aura donc à prendre que les cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \dots, \frac{(m-2)\pi}{m} \text{ et } \frac{m\pi}{m} \text{ ou } \pi.$$

Les cosinus de ces arcs sont égaux et de signes contraires à ceux qui correspondent à $y = 0$.

Si, en effet, on retranche les derniers de π , on obtient

$$\frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{(m-3)\pi}{m}, \dots, \frac{2\pi}{m}, 0,$$

arcs identiques à ceux qu'on a obtenus pour $y = 0$, mais rangés en sens inverse.

Donc, si m est impair, il y a sur la ligne AB un point simple correspondant à $z = b$, et $\frac{m-1}{2}$ intersections; de même sur la ligne CD; seulement les points sont disposés en sens inverse, ce qu'on pouvait prévoir, puisqu'il y a un centre sur l'axe des y , au milieu de la ligne EG. Il y a donc en tout $m-1$ intersections sur les droites AB et CD, comme dans le cas précédent. Le point $z = 0$ ne se trouve plus sur aucune des deux lignes AB et CD, mais aux centres, c'est-à-dire aux points $y = \frac{c}{4m}$ et $y = \frac{3c}{4m}$.

Pour bien saisir la forme des courbes cylindriques, il est indispensable de répéter au moins deux fois chaque figure élémentaire, comme on l'a fait dans les fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

On voit que, si m ou le nombre de rotations est pair, la figure générale est formée d'une série de quadrilatères à côtés courbes, ayant les diagonales perpendiculaires, se touchant par les sommets et se répétant périodiquement; entre ceux-ci sont placés d'autres quadrilatères dont chaque rangée est terminée par deux triangles curvilignes. Il y a sur la première rangée $\frac{m-2}{2}$ quadrilatères, et sur la deuxième $\frac{m-4}{2}$ et 2 triangles.

Si m est impair, il y a sur chaque rangée $\frac{m-3}{2}$ quadrilatères et un triangle; la rangée suivante peut s'obtenir en prenant la symétrique de la première, et la faisant glisser ensuite de la quantité $\frac{c}{2m}$.

TROISIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES PROVENANT DE LA PROJECTION DES COURBES CYLINDRIQUES.

Les équations de la courbe due à la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires sont, comme on l'a vu,

$$(1) \quad x = a \cos 2\pi m(t + \delta),$$

$$(2) \quad z = b \cos 2\pi nt.$$

On peut encore écrire l'équation (1)

$$x = a \cos 2\pi(mt + \Delta),$$

avec $\Delta = m\delta$.

THÉORÈME I. — *La différence de phase δ ne doit varier que de 0 à $\frac{1}{n}$ ou Δ de 0 à $\frac{1}{mn}$.*

Comme la projection de la courbe cylindrique s'effectue sur un des plans diamétraux du cylindre, l'axe des x est la projection du cercle (γ) de base du cylindre, et la valeur de z reste la même.

On a vu que la courbe cylindrique se compose de la même figure élémentaire répétée n fois sur la surface du cylindre; il suffira donc

que le plan diamétral, sur lequel se fait la projection, tourne d'un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$, pour que l'on obtienne toutes les courbes représentées par les équations (1) et (2).

La quantité δ doit donc varier seulement de 0 à $\frac{1}{n}$ ou Δ de 0 à $\frac{1}{mn}$. Or comme, dans un temps égal à l'unité, la molécule vibrante fait m rotations et n oscillations, la fraction $\delta = \frac{1}{n}$ de la durée de l'une des m rotations correspond à la fraction $\frac{1}{mn}$ du temps total, pris pour unité. Il suffira donc que le temps Δ , qui sert à exprimer la différence de phase des deux vibrations simultanées, varie de 0 à $\frac{1}{mn}$, pour obtenir toutes les courbes dues à la composition des deux mouvements vibratoires; ce temps $\frac{1}{mn}$ correspond à la fraction $\frac{1}{m}$ de la durée d'une des n vibrations, ou à la fraction $\frac{1}{n}$ de la durée d'une des m vibrations.

Si le rapport des nombres des vibrations, au lieu d'être exactement $\frac{n}{m}$, en diffère très-peu, on sait que la courbe obtenue présente la forme caractéristique de l'accord exact $\frac{n}{m}$, mais passe successivement par toutes les formes correspondant aux diverses valeurs de Δ . Du temps nécessaire pour obtenir toutes les transformations successives et revenir à la même forme de courbe on peut déduire, ainsi que l'a fait voir M. Lissajous, la différence du nombre des vibrations de l'un des sons à celui qui donnerait exactement l'intervalle $\frac{n}{m}$, l'autre son restant fixe.

En effet, supposons qu'il se produise en une seconde p transformations complètes des courbes correspondant à l'accord exact $\frac{n}{m}$; quel est le rapport des nombres de vibrations faites en une seconde ?

On peut admettre qu'en une seconde il y a nk oscillations sur la surface du cylindre, et par suite, dans le temps $\frac{1}{p}$, $\frac{nk}{p}$ oscillations; pendant ce temps, la molécule accomplit $\frac{mk}{p} + \frac{1}{n}$ rotations, puisque

l'on peut supposer que, pendant ce temps $\frac{1}{p}$, le plan de projection a tourné dans un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$. Le rapport des nombres de vibrations sera donc

$$\frac{\frac{mk}{p} + \frac{1}{n}}{\frac{nk}{p}} = \frac{mk + \frac{p}{n}}{nk}.$$

Le signe de $\frac{p}{n}$ peut être négatif; on ne peut, du reste, s'assurer du signe de cette quantité qu'en haussant ou abaissant le son correspondant à m vibrations par exemple, et voyant si p augmente ou diminue. Supposons que $\frac{p}{n}$ soit positif; on peut écrire le même rapport égal à

$$\frac{mk'}{nh' - \frac{p}{m}}.$$

En égalant l'une à l'autre ces deux valeurs, on trouve $k = k' - \frac{p}{mn}$. Il est donc indispensable de connaître k ou k' , c'est-à-dire de connaître le nombre M ou N de vibrations de l'un des deux sons par seconde; on aura alors, pour le rapport des nombres de vibrations, soit

$$\frac{\frac{Nm}{n} \pm \frac{p}{n}}{N}, \text{ soit } \frac{M}{\frac{m}{n} \mp \frac{p}{m}}.$$

La méthode optique, employée pour accorder deux instruments, présente donc cet avantage, que plus le rapport $\frac{n}{m}$ qui exprime l'intervalle des deux sons, est compliqué, plus l'accord peut être établi avec précision, puisqu'une seule vibration en plus ou en moins de l'un des deux sons produit soit n , soit m transformations complètes de la figure caractéristique de l'intervalle $\frac{n}{m}$; le degré de précision que donnerait l'oreille, au contraire, est d'autant moindre que le rapport $\frac{n}{m}$ est plus compliqué.

THÉORÈME II. — *La courbe projetée est enfermée dans un rectangle projection de la surface du cylindre; il y a n contacts sur les côtés parallèles à l'axe des x , et m sur les côtés parallèles à l'axe des z .*

La même figure élémentaire se trouvant répétée n fois sur la surface du cylindre, on a dans chacune $z = \pm b$; il y aura donc n contacts sur les parallèles à l'axe des x ; dans chaque figure, il y a m branches de courbes, et par conséquent m contacts sur chacune des parallèles à l'axe des z , qui représente la projection du contour apparent du cylindre.

THÉORÈME III. — *Dans toutes les figures correspondant au même intervalle $\frac{n}{m}$, les ordonnées et les abscisses restent les mêmes; la seule différence est due au mode de groupement de ces coordonnées.*

Puisque les figures dues aux différentes valeurs de Δ peuvent être obtenues par la rotation d'un cylindre ayant pour axe, soit l'axe des x , soit l'axe des z à volonté, et sont la projection de la courbe tracée sur ce cylindre, il en résulte que les coordonnées restent toujours les mêmes en valeur absolue; leur relation seule change d'une figure à l'autre.

THÉORÈME IV. — *Il existe, en général, $2mn - (m + n)$ intersections situées sur des parallèles à l'axe des x et des z ; certaines de ces parallèles se déplacent quand Δ varie; d'autres restent fixes.*

Supposons, en premier lieu, le nombre m des rotations pair et le nombre n des oscillations impair; on sait qu'il y a dans ce cas (fig. 2, 4, 6, 8), dans chaque figure élémentaire, $\frac{m}{2} - 1$ intersections sur la ligne AB, et $\frac{m}{2}$ sur la ligne CD, en tout $m - 1$ intersections. Comme, dans toute la courbe cylindrique, on peut mener n lignes telles que AB et CD, il y aura $\frac{m}{2} - 1$ intersections sur n parallèles à l'axe des z passant par les maxima, et $\frac{m}{2}$ sur n autres parallèles passant par les intersections les plus voisines de ces maxima, en tout $(m - 1)n$; ces points sont en outre répartis sur $m - 1$ parallèles à l'axe des x , n sur chaque parallèle; ces dernières lignes occuperont toujours la même position, quelle

que soit la valeur de Δ . Il y a en outre d'autres intersections qu'on peut supposer dues aux projections sur un même plan des parties antérieures et postérieures à ce plan de la courbe cylindrique. On peut obtenir ces dernières en considérant la courbe plane comme la projection d'une courbe cylindrique tracée sur un cylindre perpendiculaire au premier, et formée par n rotations et m oscillations. Comme le nombre de rotations ici est impair, il y aura, d'après la forme de la figure élémentaire, $\frac{n-1}{2}$ intersections sur $2m$ parallèles à l'axe des x qui se déplacent quand Δ varie; chaque parallèle passe par un maximum, et les points sont disposés en sens inverse sur deux parallèles voisines; ces mêmes points sont distribués aussi à raison de m sur $n-1$ parallèles à l'axe des z , parallèles qui restent fixes, quand Δ varie.

Si m et n sont impairs tous deux, on appliquerait au nombre m ce qui a été dit précédemment du nombre n ; mais le nombre des intersections reste toujours le même, et est égal à

$$n(m-1) + m(n-1) = 2mn - (m+n),$$

sauf le cas où les projections des parties antérieures et postérieures se superposent.

Comme vérification de ce problème, j'ai disposé dans la *fig. 9* différentes courbes correspondant au rapport 4:3 et 5:3, de manière à mettre en évidence les parallèles aux axes qui restent fixes, quand varie Δ .

La plupart des autres propriétés des courbes acoustiques se démontrant différemment, suivant que l'on a m et n pairs ou impairs, je vais énoncer ces propriétés, dont je donnerai successivement la démonstration.

THÉORÈME V. — *Si l'on a m pair et n impair, l'axe des x est un axe de symétrie; si l'on a n pair et m impair, l'axe des z est un axe de symétrie, quel que soit Δ ; l'autre axe n'est pas, en général, un axe de symétrie.*

THÉORÈME VI. — *Si m et n sont impairs, la courbe n'a plus en général d'axe de symétrie; mais l'origine des coordonnées en est le centre.*

THÉORÈME VII. — Pour $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2mn}$, la figure est simplifiée par la superposition des projections.

THÉORÈME VIII. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$ ou $\frac{3}{4mn}$, la figure est symétrique par rapport aux deux axes, quels que soient m et n .

THÉORÈME IX. — Pour $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, on a les mêmes courbes, mais parcourues en sens contraires.

THÉORÈME X. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, les deux courbes sont différentes : si m est pair et n impair, elles sont disposées symétriquement par rapport à l'axe des z ; si m est impair et n pair, elles sont symétriquement placées par rapport à l'axe des x ; si m et n sont impairs tous deux, elles sont symétriquement placées par rapport aux deux axes à la fois.

Pour la démonstration de ces divers énoncés, j'emploierai des figures schématiques différentes, suivant que m sera supposé pair ou impair, puisque le nombre de rotations détermine la forme de la figure élémentaire qui, en se répétant, constitue la courbe cylindrique dont on étudie la projection.

SUPPOSONS DONC D'ABORD QUE m SOIT PAIR ET n IMPAIR, c'est-à-dire qu'il y ait, suivant les conventions établies, m rotations et n oscillations sur la surface du cylindre. Pour tracer la figure schématique, nous admettrons, par exemple, que $n = 3$, avec m quelconque, mais pair (Pl. I, fig. 10). Les plans diamétraux OA_1, OA_2, OA_3 (représentés ici par leurs traces sur la base du cylindre) séparent les parties répétées identiquement sur le cylindre, et sont en même temps des plans de symétrie. Les plans diamétraux OB_1, OB_2, OB_3 sont également des plans de symétrie alternant avec les premiers, et divisant en deux parties égales l'angle des deux plans voisins. La courbe cylindrique étant, dans le cas actuel, symétrique par rapport à l'axe des y , je la représenterai par deux courbes tracées de part et d'autre de la circonférence de base, afin de rappeler sa forme générale. On peut d'abord faire les remarques suivantes :

α . Comme la figure élémentaire se trouve répétée un nombre impair de fois sur la surface du cylindre, un plan diamétral passant par un

des axes A passe par un des axes B, puisque, si $n = 2n' + 1$, dans une demi-circonférence, la même figure se trouve répétée un nombre de fois égal à $\frac{2n'+1}{2}$ ou $n' + \frac{1}{2}$.

β. Le plan perpendiculaire à un plan diamétral de symétrie (passant par un axe A et un axe B) passe lui-même par la génératrice située au quart ou aux trois quarts d'une figure élémentaire. Dans un quart de circonférence, en effet, il y a $\frac{2n'+1}{4}$ ou $\frac{n'}{2} + \frac{1}{4}$ divisions, ce qui donne le point $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ pour la division à laquelle aboutit la perpendiculaire à un plan de symétrie, suivant que n' est lui-même pair ou impair.

γ. Si l'on mène un plan diamétral quelconque, les z correspondant à ses deux intersections avec la courbe cylindrique seront différents en général sur les deux parties opposées du cylindre; les deux génératrices qui y correspondent sont, en effet, équidistantes, l'une d'un axe A, l'autre d'un axe B.

Ces remarques générales faites, la démonstration des théorèmes précédents devient très-facile et presque intuitive.

THÉORÈME V. — L'axe des x est seul un axe de symétrie.

Chaque figure élémentaire est, en effet, symétrique par rapport à la ligne des y sur la surface du cylindre; la projection le sera donc par rapport à l'axe des x ; l'axe des z , en général, n'est pas un axe de symétrie, puisque aux deux extrémités d'un plan diamétral quelconque les z sont différents.

THÉORÈME VII. — Pour $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2mn}$, on a la figure simplifiée.

Pour $\Delta = 0$, en effet (Pl. I, fig. 10), le plan diamétral passe par deux axes de symétrie A, et B_{n+1} ($n = 2n' + 1$): les projections de la partie antérieure et de la partie postérieure de la courbe cylindrique se superposeront; en outre, pour $x = 0$, on a $z = \pm b$; ce contact avec les côtés du rectangle où la courbe est renfermée compte comme simple, les autres comptent comme étant doubles.

Pour $\Delta = \frac{1}{2mn}$, on a également une courbe simplifiée; mais elle est symétrique de la précédente par rapport à l'axe des z , puisqu'à l'inter-

section du plan de projection et de la surface du cylindre l'axe A est remplacé par un axe B, et réciproquement.

THÉORÈME VIII. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$ et $\Delta = \frac{3}{4mn}$, l'axe des z devient également un axe de symétrie.

Soit MN (Pl. I, fig. 10) le plan de projection; le plan perpendiculaire à ce plan A_2B_3 passe, dans ce cas, par les axes A et B. En effet, quand le plan de projection passe par les axes A et B (A, B_{n+1}), le plan perpendiculaire OP passe au contraire par le point $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ d'une figure élémentaire. Dans le cas actuel, la courbe cylindrique est donc symétriquement placée par rapport à ce plan perpendiculaire au plan de projection, et, par suite, l'axe des z sera un axe de symétrie de la projection, puisque, pour $+x$ et $-x$, on aura le même z . La partie antérieure et la partie postérieure donnent des projections différentes.

THÉORÈME IX. — Pour $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, on a la même courbe, mais les deux mouvements ont lieu en sens contraires.

Au lieu de prendre deux plans faisant, avec le plan primitif correspondant à $\Delta = 0$, les angles $2\pi\Delta_1$, et $2\pi\left(\frac{1}{mn} - \Delta_1\right)$, on peut prendre deux plans faisant, avec le premier, les angles $\pm 2\pi\Delta_1$, puisque la courbe est la même identiquement, si l'on augmente ou diminue Δ de $\frac{1}{mn}$. Je démontrerai donc que, sur les deux plans, OM_1 et OM_2 , faisant avec OA_1 (Pl. I, fig. 11) des angles égaux, les projections seront identiques. Soient, en effet, deux lignes OC et OD correspondant aux arcs $+y$ et $-y$, menées de part et d'autre du plan OA_1 ; comme le plan A, OB_{n+1} est un plan de symétrie de la courbe cylindrique, les z correspondant aux points C et D ou à $+y$ et $-y$ (quel que soit y) seront égaux.

Par rapport au plan OM_1 , les y des deux points C et D deviendront $y - 2\pi\Delta_1$ et $-y - 2\pi\Delta_1$, et par suite, pour le même z , on aura en projection les deux abscisses x_1 et x_2 . Par rapport au plan OM_2 , les y des deux points C et D seront $y + 2\pi\Delta_1$ et $-y + 2\pi\Delta_1$, qui, en projection, donneront les mêmes abscisses x_1 et x_2 ; seulement l'abscisse x_1 , correspondant à la partie antérieure pour le plan OM_1 , correspond à la

partie postérieure pour OM_2 , et réciproquement; donc, les z restant les mêmes dans la projection, les courbes projetées sur OM_1 et OM_2 seront identiques, mais parcourues en sens contraires par la molécule vibrante.

Il en sera, par suite, de même si l'on compare les projections effectuées sur les plans correspondant aux valeurs $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$.

On conclut de là que, pour $\Delta = \frac{3}{4mn}$, on doit avoir la même courbe que pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$, courbe qui est symétrique par rapport aux deux axes; si Δ varie de 0 à $\frac{1}{mn}$, on a donc deux fois chaque courbe, sauf celles qui correspondent à $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2mn}$ et qui sont les courbes simplifiées.

THÉORÈME X. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, les deux courbes sont symétriquement placées par rapport à l'axe des z ; de même pour $\Delta = \frac{3}{4mn} \pm \Delta_1$.

Quand le plan de projection a, en effet, la position OM (*Pl. I, fig. 10*) correspondant à $\Delta = \frac{1}{4mn}$, le plan perpendiculaire est, comme on l'a vu, un des plans de symétrie de la courbe cylindrique, qui est le plan A_2OB_2 dans le cas de la *fig. 10, Pl. I*; en répétant exactement le raisonnement qui a servi dans la démonstration précédente, on reconnaîtra facilement que les projections sur deux plans, faisant des angles $+2\pi\Delta_1$ et $-2\pi\Delta_1$ avec le plan MON , seront symétriquement placés par rapport à l'axe des z .

SUPPOSONS m ET n IMPAIRS TOUTS LES DEUX. — La figure élémentaire n'est plus, dans ce cas, symétrique par rapport à l'axe des y ; mais, comme on l'a vu, il y a des centres aux points $y = \frac{c}{4}$ et $y = \frac{3c}{4}$. On pourra donc représenter la courbe cylindrique comme on l'a fait dans la *fig. 12, Pl. I*, où, avec m impair et quelconque, on suppose encore $n = 3$; A_1, A_2, A_3 sont les projections des axes de symétrie passant par les points $y = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots$, B_1, B_2, B_3, \dots les projections des

axes passant par les points $y = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \frac{5l}{2n}, \dots$; C_1, C_2, C_3, \dots sont les centres de la courbe cylindrique rectifiée; par suite, pour des valeurs égales de y comptées de part et d'autre de l'un de ces points, on trouve des valeurs de z égales et de signes contraires.

On peut faire d'abord les remarques suivantes :

α. Un plan diamétral passant par un des axes A passe également par un axe B, puisque n est impair.

β. Le plan perpendiculaire à un plan diamétral passant par un des points C_1, C_2, \dots ($\frac{l}{4}$ ou $\frac{3l}{4}$), passe par un axe A et B, et se trouve être un plan de symétrie de la courbe cylindrique.

γ. Si l'on mène un plan diamétral quelconque MN, les z correspondant à son intersection avec la courbe cylindrique seront égaux et de signes contraires à ses deux extrémités. Si, en effet, on pose $AM = y, NB_{n'+1} = y$, ($n = 2n' + 1$) également; or, à des distances égales d'un axe A et B, les z sont égaux et de signes contraires, puisque le milieu de la distance d'un axe A à un axe B le plus voisin se trouve un centre C.

Il y a, dans le cas actuel, à démontrer en particulier les théorèmes suivants, en laissant de côté ceux dont la démonstration est la même que précédemment.

THÉORÈME VI. — *La courbe projetée n'a plus, en général, d'axe de symétrie; l'origine des coordonnées en est le centre.*

Deux points diamétralement opposés sur le cylindre ont des z égaux et de signes contraires, et, projetés sur un plan quelconque, donnent des points dont les abscisses sont $+x$ et $-x$.

THÉORÈME VIII. — *Pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$ ou $\frac{3}{4mn}$, la figure est symétrique par rapport aux deux axes.*

On démontrerait exactement, de la même manière qu'on l'a fait précédemment, que la figure projetée est symétrique par rapport à l'axe des z , puisque le plan perpendiculaire au plan de projection est un plan de symétrie de la courbe cylindrique. Cet axe passant par le centre de la courbe, il en résulte que la droite perpendiculaire est également un axe de symétrie; car on a les points $(+x_1, +z_1)$ et $(-x_1, +z_1)$,

l'axe des z étant un axe de symétrie. L'origine étant un centre, on aura aussi les points $(-x_1, -z_1)$ et $(+x_1, -z_1)$; donc, en groupant ainsi ces points $(+x_1, +z_1)$, $(+x_1, -z_1)$ et $(-x_1, +z_1)$, $(-x_1, -z_1)$, on reconnaît que l'axe des x est également un axe de symétrie.

THÉORÈME IX. — Pour $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, on a les mêmes courbes, mais parcourues en sens contraires.

Même démonstration.

THÉORÈME X. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, les courbes sont symétriquement placées par rapport aux axes des x et des z .

On démontrerait, comme précédemment, que les deux courbes sont symétriquement placées par rapport à l'axe des z , et l'on en conclut, comme pour le théorème VIII, qu'elles sont de même placées symétriquement par rapport à l'axe des x .

SUPPOSONS ENFIN m IMPAIR ET n PAIR. — Il serait presque superflu d'examiner ce dernier cas, puisque la considération de la courbe cylindrique n'est destinée qu'à simplifier les démonstrations, et qu'il suffirait de considérer un cylindre perpendiculaire au premier, sur lequel il y aurait n rotations accompagnées de m oscillations. Cependant, pour compléter l'emploi de la méthode précédente, j'indiquerai rapidement la démonstration des théorèmes relatifs à ce dernier cas; on doit arriver à démontrer que toutes les propriétés des courbes projetées relatives à l'axe des z se rapportent actuellement à l'axe des x et réciproquement.

La *fig. 13* représente d'une manière schématique le cas actuel, avec m quelconque, mais impair, et n égal à 4.

On reconnaît facilement :

a. Qu'un plan diamétral passant par un axe de symétrie A passe à son autre extrémité par un axe de même nature; de même pour un plan diamétral passant par un axe B.

β. Deux points diamétralement opposés, M et N, ont des z égaux et de mêmes signes.

THÉORÈME V. — L'axe des z est un axe de symétrie, quel que soit Δ .

Deux points diamétralement opposés de la courbe cylindrique ont,

en effet, des z égaux et de mêmes signes, et donnent en projection des points ayant pour abscisses $+x$ et $-x$.

THÉORÈME VII. — Pour $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2mn}$, on a les courbes simplifiées.

Ceci résulte, comme on l'a déjà vu, de ce que le plan de projection est un plan de symétrie de la courbe cylindrique; dans ce cas, les deux courbes seront disposées symétriquement par rapport à l'axe des x . Si l'on prend deux points, M et P, équidistants l'un de l'axe A, l'autre de l'axe B, à ces deux points projetés l'un sur OA, et l'autre sur OB, correspondront le même x et des z égaux et de signes contraires.

THÉORÈME VIII. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn}$ et $\Delta = \frac{3}{4mn}$, la figure est symétrique par rapport aux deux axes.

Dans ce cas, en effet, le plan de projection passe par un des centres de la figure élémentaire; donc, à deux arcs $+y$ et $-y$, donnant en projection le même x , correspondent des z égaux et de signes contraires; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des x , et elle l'est, comme on le sait, par rapport à l'axe des z .

THÉORÈME IX. — Pour $\Delta = \Delta_1$ et $\Delta = \frac{1}{mn} - \Delta_1$, on a les mêmes courbes parcourues en sens contraires.

Même démonstration.

THÉORÈME X. — Pour $\Delta = \frac{1}{4mn} \pm \Delta_1$, on a deux courbes placées symétriquement par rapport à l'axe des x .

La démonstration est analogue aux précédentes. Si le plan de projection était OC_1 (*fig. 13*), deux points P et P₁ correspondant à $+y$ et $-y$, ayant des z égaux et de signes contraires, donneraient en projection deux points ayant le même x .

Pour un plan faisant un angle α avec le premier, les arcs $+y$ et $-y$ deviennent $y - \alpha$ et $-y - \alpha$, correspondant aux abscisses x_1 et x_2 .

On a donc les deux points, en projection, $(+x_1, +z)$ et $(+x_2, -z)$.

Pour le plan qui ferait un angle $-\alpha$ avec OC_1 , les arcs y et $-y$ deviennent $y + \alpha$ et $-y + \alpha$, auxquels correspondent en projection les

abscisses $+x_2$ et $+x_1$; on aura donc sur ce second plan les points $(+x_2, +z)$ et $(+x_1, -z)$.

Les deux figures sont donc placées symétriquement par rapport à l'axe des x .

QUATRIÈME PARTIE.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE.

On a pu vérifier toutes les propriétés des courbes dues à la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires en les produisant à l'aide de diapasons portant des miroirs. En se servant de diapasons munis de curseurs, d'après le système imaginé par M. Mercadier, on peut obtenir une fixité absolue de l'accord, et même arriver à maintenir la phase presque fixe également.

Mais on peut aussi, pour cette étude spéciale, construire en carton les courbes cylindriques. J'ai exécuté les reliefs des courbes cylindriques correspondant aux intervalles $1:1$, $1:2$, $2:1$, $2:3$, $3:2$, $3:4$, $4:3$. (Le premier chiffre indique le nombre des rotations, et le second celui des oscillations.)

Je me suis servi, dans ce but, d'un cylindre de bois parfaitement tourné, ayant un diamètre de 52^{mm} , 2 ; la longueur l de la circonférence développée est égale à 164 millimètres. Ensuite j'ai tracé par points, sur du carton ayant une épaisseur de 0^{mm} , 6 , des demi-sinusoïdes ayant toutes une ordonnée maxima égale à 27 millimètres, et pour base de la sinusoïde entière l , $2l$, $\frac{l}{2}$, $\frac{3l}{2}$, $\frac{2l}{3}$, $\frac{4l}{3}$, $\frac{3l}{4}$. J'ai découpé le carton suivant la courbe tracée, en ajoutant une petite portion de part et d'autre de l'axe des abscisses, et j'ai obtenu ainsi des patrons permettant de tracer, avec une grande netteté, les courbes cylindriques développées.

J'ai dessiné de cette façon ces courbes sur du carton mince, et tracé ensuite deux traits équidistants de cette première courbe, de manière à obtenir une bande de 4 millimètres environ. Puis j'ai fait découper en cuivre mince les bandes ainsi obtenues. Les *fig.* 14 et 15 représentent deux de ces bandes découpées, correspondant aux nombres $4:3$ et $3:4$. Avec ces bandes de cuivre posées sur une feuille de carton mince ou de papier bristol, et fixées à l'aide de poids, on peut,

avec un crayon fin, tracer rapidement les courbes cylindriques développées; on découpe ce dessin avec un canif ou des ciseaux, et l'on amincit, à l'aide d'un canif, les bords des bandes qui doivent être superposés. Le carton découpé ayant été mouillé et placé sur le cylindre de bois dont il prend la forme, on le maintient à l'aide d'un cordon fortement serré; on colle ensuite les parties qui se superposent. Quand le carton est bien sec et bien collé, on l'enlève du cylindre, dont il conserve la forme, et, dans le cercle de base, on colle un cercle de carton égal à la base du cylindre. La *fig. 16* représente les divers reliefs correspondant aux accords indiqués précédemment.

On consolide ces reliefs en les encollant avec de la colle forte et les vernissant avec le vernis noir dit *japonais*.

Pour démontrer, à l'aide de ces reliefs, les propriétés des courbes projetées sur divers plans diamétraux du cylindre, on les place sur un support représenté *fig. 17*. Il se compose d'une tige creuse AB, terminée par un cadran divisé EE' et supporté par un pied CC'. Un disque DD' est fixé sur une tige qui pénètre dans la tubulure centrale de la tige AB et y peut tourner facilement. Sur le disque DD' on peut placer successivement les divers reliefs de carton; une aiguille fixée sur le disque parcourt les divisions du cadran EE' et indique les angles dont on a fait tourner le relief pour le projeter. On peut observer directement la projection de la courbe cylindrique sur un des plans diamétraux, en plaçant l'œil à la même hauteur et à une certaine distance, et mettant de l'autre côté une feuille de papier blanc.

Pour effectuer la projection même de la courbe, on place le relief dans un faisceau cylindrique de rayons lumineux, un peu plus large que le relief; au-devant de ce dernier, on met une lentille convergente à foyer assez long (20 à 25 centimètres) et d'une grande ouverture. Un objectif de photographie (plaque entière) convient parfaitement dans ce but. Afin de faire voir facilement l'influence de l'angle dont on a tourné le cylindre, sur la forme de la courbe projetée, on peut fixer une petite tige verticale sur l'un des sommets de la courbe cylindrique; la position de cette tige sur la projection indique suffisamment l'angle dont on a fait tourner la courbe cylindrique.



TERME GÉNÉRAL
D'UNE SÉRIE QUELCONQUE,

DÉTERMINÉE

A LA FAÇON DES SÉRIES RÉCURRENTES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

INTRODUCTION.

§ I. — **Objet du présent Mémoire.**

1. Parmi les différents moyens de déterminer une série, l'un des plus simples évidemment consiste à donner, en même temps que les valeurs de ses premiers termes, une relation du premier degré liant chaque terme de la série à un ou plusieurs des termes précédents. Dans ce Mémoire, nous supposons une série quelconque déterminée de cette façon, et nous nous proposons de trouver l'expression de son terme général.

§ II. — **Ordre suivi.**

2. Nous précisons d'abord ce que nous entendons par relation du premier degré liant chaque terme à un ou plusieurs des précédents; et nous montrons qu'il existe un très-grand nombre de séries qui se présentent à nous déterminées spontanément par les valeurs de leurs premiers termes, et par une relation du premier degré.

Nous rappelons qu'on a déjà obtenu l'expression du terme gé-

néral de séries ainsi déterminées, mais seulement pour des formes très-particulières de la relation du premier degré; et nous donnons une expression de ce terme général qui convient à toutes les formes possibles de cette relation.

Nous faisons remarquer ensuite que, dans les applications de notre expression du terme général, les différences dans le résultat final proviennent surtout des différences de forme de la relation du premier degré. Nous sommes ainsi conduits à énumérer et à classer ces formes : nous les trouvons au nombre de huit.

Enfin nous considérons successivement les huit formes que peut affecter la relation du premier degré; pour chacune d'elles, nous cherchons ce que devient notre expression du terme général; et, pour chacune d'elles aussi, nous appliquons nos résultats à la détermination du terme général d'une série particulière donnée.

§ III. — Méthode employée.

3. Bien que, par son objet, ce Mémoire appartienne à l'Algèbre, notre méthode pour déterminer le terme général est bien moins algébrique que combinatoire. Elle donne ce terme sous la forme d'une ou plusieurs sommes de produits dans chacun desquels les facteurs doivent satisfaire à des conditions que nous faisons connaître. Le problème de la détermination du terme général, dans la pleine généralité que nous donnons à la relation du premier degré, nous semble très-difficilement abordable par les procédés de l'Algèbre ordinaire.

CHAPITRE I.

DÉTERMINATION DE LA SÉRIE.

1. *Détermination de la série.* — Nous supposons, avons-nous dit, une série quelconque, déterminée par les valeurs de ses premiers termes et par une relation du premier degré liant chaque terme à un ou plusieurs des précédents.

Il est inutile d'expliquer ce qu'on entend par valeurs des premiers termes.

Pour ce qui est de la relation du premier degré, il faut l'entendre dans le sens le plus étendu, ou, pour nous exprimer mieux, il faut entendre que chaque terme de la série est égal à une quantité quelconque, constante ou variable, plus la somme d'un nombre quelconque constant ou variable des termes précédents, multipliés respectivement par des coefficients quelconques constants ou variables.

Si nous désignons le premier terme de la série par U_1 , le second par U_2 , et en général le $n^{\text{ième}}$ par U_n , notre relation pourra toujours se formuler ainsi :

$$U_n = u_n + \sum_{k=1}^{\lambda_n} A_k^{(n)} U_{n-k},$$

u_n étant une quantité connue fonction de n ; λ_n un nombre entier connu fonction de n et au plus égal à $n - 1$; $A_k^{(n)}$ un coefficient connu fonction des entiers n et k .

Nous pouvons remarquer, dès à présent, qu'on aura toujours

$$U_1 = u_1.$$

Pour abrégé, nous désignerons souvent la relation du premier degré par ces mots « la loi de la série », ou, plus simplement, « la loi ».

5. *Exemples de séries ainsi déterminées.* — Les Mathématiques nous présentent une foule de séries qui s'offrent à nous déterminées spontanément par les valeurs de leurs premiers termes et une relation du premier degré. Telles sont :

Les séries récurrentes proprement dites, rencontrées par Cassini ⁽¹⁾, nommées par Moivre ⁽²⁾, étudiées par lui d'abord, puis par Euler ⁽³⁾, par Lagrange ⁽⁴⁾, etc., et dont chaque terme est la somme d'un nombre fixe des précédents, multipliés respectivement par des coefficients constants ;

⁽¹⁾ *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1680, p. 309.

⁽²⁾ *Miscellanea analytica*, p. 27.

⁽³⁾ *Introductio in Analysin*, t. I, Ch. XIII et XVII.

⁽⁴⁾ *Œuvres*, t. I, III, V.

Les séries considérées pour la première fois par Lagrange (¹), où chaque terme est égal à une quantité connue, plus la somme d'un nombre fixe des termes précédents, multipliés par des coefficients constants;

Celles des séries, sommées par Stirling (²), dans lesquelles chaque terme est la somme d'un nombre fixe des précédents, multipliés respectivement par des quantités variables.

Il en est de même des séries qui ont pour termes :

Les intégrales qui se ramènent à d'autres analogues à l'aide de l'intégration par parties;

Les termes des réduites successives des fractions continues;

Les intégrales nommées Y_μ , Z_ν ;

Les fonctions X_n de Legendre;

Les nombres de Bernoulli;

Les dérivées successives des fonctions algébriques;

$\sin nx$ et $\cos nx$ considérés comme fonctions de $\sin x$ seul ou de $\cos x$ seul;

Les sommes des puissances semblables des n premiers nombres;

Les sommes des puissances semblables des racines d'une équation;

Etc., etc. . . .

Parmi toutes ces séries, les plus connues sont les séries récurrentes proprement dites. C'est pourquoi, quand une série est déterminée par les valeurs de ses premiers termes et par une relation du premier degré, nous disons, comme dans le titre de ce Mémoire, qu'elle est déterminée à la façon des séries récurrentes, quoique notre relation du premier degré soit infiniment plus générale que celle qui convient aux séries récurrentes proprement dites.

(¹) *Sur l'intégration d'une équation différentielle*, etc. (*OEuvres*), t. I, p. 23.

(²) *Methodus differentialis*, etc. Londini, 1764.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL.

§ I. — Expressions particulières.

6. *Séries dont on a déjà obtenu le terme général.* — Les seules séries, déterminées comme nous le supposons, dont on ait obtenu directement le terme général, sont les séries récurrentes proprement dites, et les séries considérées pour la première fois par Lagrange, c'est-à-dire des séries où la loi affecte une forme extrêmement particulière; encore, pour ces deux espèces de séries, n'a-t-on obtenu l'expression du terme général que dans le cas où l'on sait résoudre une certaine équation algébrique.

7. *Séries récurrentes proprement dites.* — Moivre a montré le premier (1) qu'une série récurrente proprement dite n'était autre chose que la suite des coefficients du développement, suivant les puissances croissantes de la variable, d'une certaine fraction rationnelle, qu'on appelle la *fraction génératrice* de la suite considérée. Lagrange, de son côté (2), a nommé *équation génératrice* de la suite l'équation algébrique et entière que l'on obtient en remplaçant dans la loi de la série les termes $U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \dots$, respectivement par $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots$. D'ailleurs on peut voir facilement que le premier membre de l'équation génératrice ne diffère du dénominateur de la fraction génératrice que par le changement de x en $\frac{1}{x}$.

On n'a pas donné d'expression du terme général pour le cas où l'équation génératrice ne peut pas être résolue complètement. Dans le cas où cette résolution complète est possible, on a trouvé l'expression fort remarquable que nous allons rappeler.

(1) *Miscellanea analytica.*

(2) *Mémoire sur l'expression du terme général, etc.* (Œuvres), t. V, p. 625.

Si l'on désigne par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice, par α le degré de multiplicité de cette racine, et qu'on étende à toutes les racines le \sum ci-dessous, on a identiquement

$$U_n = \sum \varphi_\alpha(n) a^\alpha,$$

$\varphi_\alpha(n)$ étant un polynôme entier en n , du degré $\alpha - 1$.

Ce résultat a été établi par Moivre ⁽¹⁾ dans le cas où l'équation génératrice n'a que des racines simples; il a été développé ensuite par Euler ⁽²⁾, et enfin démontré complètement par Lagrange ⁽³⁾, qui s'est surtout occupé du cas des racines égales.

8. *Séries de Lagrange.* — Ce sont, comme nous l'avons vu, des séries récurrentes proprement dites, au second membre de la loi desquelles on a ajouté une quantité connue. Lagrange a donné ⁽⁴⁾ l'expression de leur terme général, sous une forme absolument analogue à la précédente; mais pour le cas seulement où l'équation génératrice, qu'on obtient en supprimant la quantité, peut être résolue complètement.

§ II. — Expression générale.

9. *But qu'on se propose.* — De la façon dont notre série est déterminée, il suit immédiatement que son terme général U_n est une fonction rationnelle et entière des quantités connues u , et des coefficients $A_\nu^{(v)}$, dans lesquels l'indice ν ne dépasse pas n . Donner le moyen de former cette fonction, tel est le but particulier de ce Chapitre et l'objet principal de tout ce travail.

Si l'on remarque qu'à chacun des termes $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$, qu'on peut regarder comme autant d'inconnues, correspond une équation du premier degré fournie par la loi de la série, on voit que le problème

⁽¹⁾ *Miscellanea analytica.*

⁽²⁾ *Introductio in Analysin*, t. I, Ch. XIII.

⁽³⁾ *Mémoire sur l'expression du terme général*, etc. (*OEuvres*), t. V, p. 625.

⁽⁴⁾ *Sur l'intégration d'une équation*, etc. (*OEuvres*), t. I, p. 21.

actuel revient à déterminer la dernière U_n des inconnues d'un système de n équations du premier degré à n inconnues.

On peut donc écrire immédiatement cette expression de U_n sous la forme d'un quotient de deux déterminants. Mais ces déterminants sont, en général, d'une structure si particulière, qu'il y a d'ordinaire grand avantage à développer l'expression de U_n .

Ce que nous cherchons, c'est la façon d'écrire ce développement lui-même directement.

10. *Lemmes.* — Pour obtenir l'expression générale de U_n , nous établirons d'abord les trois lemmes suivants :

I. Chaque terme du développement de U_n est égal à l'une quelconque u_p des n quantités connues $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, multipliée par un ou plusieurs des coefficients $A_x^{(v)}$, et, par conséquent, peut s'écrire

$$A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \dots u_p.$$

II. Si l'on regarde chaque coefficient $A_x^{(v)}$ comme du degré x , et chaque quantité connue u_p comme du degré p , l'expression de U_n est homogène et du degré n , de façon que, dans le produit précédent, les indices inférieurs des coefficients satisfont toujours à l'égalité

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots = n - p.$$

III. Enfin, si les coefficients $A_{k_1}^{(n_1)}, A_{k_2}^{(n_2)}, A_{k_3}^{(n_3)}, \dots$, qui entrent comme facteurs dans le produit précédent, y sont rangés dans un ordre tel que leurs indices supérieurs aillent constamment en croissant, les indices supérieurs et les indices inférieurs sont reliés entre eux par la relation générale

$$n_i = k_i + n_{i-1}.$$

De ces trois lemmes, le premier peut être regardé comme évident. Les deux autres, d'après la forme générale (4) de la loi de la série, subsistent pour U_n dès qu'ils sont vrais pour tous les termes précédents : étant vrais l'un et l'autre pour U_1 et U_2 , ils sont donc tous les deux d'une généralité absolue.

11. *Expression de U_n .* — Il suit de là que, si l'on désigne par $\Psi(n, p)$ le coefficient de u_p dans le développement de U_n , on a identiquement

$$\Psi(n, p) = \sum A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \dots,$$

la caractéristique \sum s'étendant à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \dots, k_1, k_2, k_3, \dots$, qui satisfont à ces conditions :

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + \dots &= n - p, \\ n_1 &= k_1 + p, \\ n_i &= k_i + n_{i-1}, \\ 0 &< k_i < \lambda_{n_i}. \end{aligned}$$

Le coefficient $\Psi(n, p)$ doit être regardé comme égal à l'unité. En résumé, on a identiquement

$$U_n = \sum_p^n \Psi(n, p) u_p.$$

Telle est notre expression du terme général. Ordonnée par rapport aux n quantités connues $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, elle peut s'écrire dès que l'on connaît ces n quantités ainsi que la loi de la série.

CHAPITRE III.

CLASSIFICATION DES DIFFÉRENTES FORMES DE LA LOI DE LA SÉRIE.

12. *Utilité d'une classification.* — L'expression du terme général que nous venons d'obtenir, à cause même de sa complète généralité, veut, pour être bien comprise, être appliquée à de nombreux exemples. Or, dans les applications, les différences qui se présentent, soit dans le mode du calcul, soit dans la nature du résultat, proviennent surtout des formes différentes que peut affecter la loi de la série. Pour faire des applications dans tous les cas qui se peuvent présenter et n'en faire

qu'une dans chacun, il est donc utile d'énumérer et de classer les différentes formes que peut prendre la loi de la série.

13. *Caractères servant à la classification.* — Dans la formule

$$U_n = u_n + \sum_k^{\lambda_n} A_k^{(n)} U_{n-k},$$

qui exprime, de la manière la plus générale, la loi de notre série, il entre trois arguments distincts, savoir : n et k dans le coefficient $A_k^{(n)}$, n dans la limite λ_n .

Il se peut que $A_k^{(n)}$ dépende ou ne dépende pas de n , dépende ou ne dépende pas de k . Il se peut de même que λ_n varie toujours avec n , ou qu'il devienne, à partir d'une certaine valeur de n , absolument constant.

En d'autres termes, si nous supposons écrites, les unes sous les autres, les égalités successivement fournies par la loi de la série, et que nous considérions le tableau ci-dessous, formé par les coefficients

$$\begin{array}{c} A_1^{(2)}, \\ A_1^{(3)}, A_2^{(3)}, \\ A_1^{(4)}, A_2^{(4)}, A_3^{(4)}, \\ \dots, \dots, \dots \end{array}$$

il se peut faire que les coefficients d'une même colonne verticale soient différents d'une ligne à l'autre ou tous égaux entre eux ; que les coefficients d'une même ligne horizontale soient aussi différents ou égaux ; enfin que les lignes horizontales aient une longueur perpétuellement variable, ou bien, à partir d'une certaine valeur de n , absolument constante.

Ces différentes manières d'être de la loi relativement à nos trois arguments sont autant de caractères qui nous permettent d'effectuer notre classification. Ils nous conduisent naturellement à reconnaître que la loi de la série peut affecter huit formes distinctes.

Seulement, pour que, dans la série de ces huit formes, les formes les plus voisines correspondent, autant que possible, aux modes de calcul et aux résultats les plus analogues, il convient d'examiner, parmi les

trois arguments, quels sont ceux qui, par leur différent mode d'action sur la loi, apportent la plus grande différence dans le calcul et dans le résultat.

Que le coefficient $A_k^{(n)}$ dépende de n ou n'en dépende pas : voilà la source de la différence la plus profonde ; que $A_k^{(n)}$ dépende de k ou n'en dépende pas : c'est l'origine d'une différence nouvelle, beaucoup moins marquée ; que λ_n varie perpétuellement, ou, à partir d'un certain instant, devienne constant : telle est la cause d'une troisième différence, la plus faible des trois.

14. *Tableau des huit formes de la loi.* — Les considérations qui précèdent nous conduisent à former le tableau suivant :

$A_k^{(n)}$ dépend de n	{	$A_k^{(n)}$ dépend de k	{	λ_n varie toujours.....	1 ^{re} forme.
				λ_n devient constant....	2 ^e forme.
		$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k .	{	λ_n varie toujours.....	3 ^e forme.
				λ_n devient constant....	4 ^e forme.
$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de n .	{	$A_k^{(n)}$ dépend de k	{	λ_n varie toujours.....	5 ^e forme.
					λ_n devient constant....
		$A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k .	{	λ_n varie toujours.....	7 ^e forme.
					λ_n devient constant....

Nous allons étudier successivement ces huit formes de la loi de la série. Dans chacune d'elles nous chercherons d'abord ce que devient notre expression du terme général ; ensuite, nous appliquerons le résultat obtenu à la détermination du terme général d'une série particulière donnée.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

§ I. — Lois de la première forme.

15. *Généralités.* — Sous cette première forme, la loi de la série dépend en réalité des trois arguments. Le terme général est donné par

notre formule générale (11). Si l'on n'introduit aucune particularité dans la loi, cette formule ne donne lieu à aucune simplification.

Bon nombre de quantités forment des séries qui présentent une loi de la première forme. Telles sont les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers; les coefficients d'une équation considérés comme fonctions des sommes des puissances semblables de ses racines; les nombres des substitutions irréductibles, etc., etc.

Nous allons faire une application de notre théorie à la détermination du nombre des substitutions irréductibles de n lettres.

16. *Application. au nombre des substitutions irréductibles.* — Le nombre des substitutions irréductibles de n lettres n'est autre chose (1) que celui des permutations de n lettres, où aucune lettre n'occupe la place que lui assigne son rang dans l'alphabet.

Soient, en général, P_n le nombre total des permutations de n lettres, et I_n le nombre des substitutions irréductibles de n lettres. Si l'on désigne par C_n^m le nombre des combinaisons simples de m lettres n à n , on voit très-facilement que le nombre des permutations de n lettres, où aucune lettre n'est à sa place, est I_n ; où une lettre est à sa place, est $C_n^1 I_{n-1}$; où deux lettres sont à leurs places est $C_n^2 I_{n-2}$; où trois lettres sont à leurs places est $C_n^3 I_{n-3}$; et enfin où toutes les lettres sont à leurs places est $C_n^n I_0$, si l'on regarde I_0 comme égal à l'unité.

Il s'ensuit immédiatement que l'on a

$$I_n + C_n^1 I_{n-1} + C_n^2 I_{n-2} + \dots + C_n^n I_0 = P_n.$$

Si nous posons

$$I_n = U_n,$$

nous voyons que U_n est le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes, et dont la loi est de la première forme.

Nous voyons en même temps que nous avons, pour cette série :

$$u_n = P_n - 1,$$

$$\lambda_n = n - 1,$$

$$\Lambda_k^{(n)} = -C_n^k.$$

(1) J.-A. SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 221.

Tirons de ces données l'expression de $\Psi(n, p)$. Nous trouvons d'abord

$$\Psi(n, p) = \sum (-1)^t C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{n_3}^{k_3} \dots C_{n_s}^{k_s},$$

avec cette condition unique que les indices supérieurs satisfassent à la relation

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_s = n - p.$$

Or

$$C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{n_3}^{k_3} \dots C_{n_s}^{k_s} = \frac{n_1!}{k_1! (n_1 - k_1)!} \frac{n_2!}{k_2! (n_2 - k_2)!} \frac{n_3!}{k_3! (n_3 - k_3)!} \dots \frac{n_s!}{k_s! (n_s - k_s)!},$$

et nous savons que l'on a

$$n_2 - k_2 = n_1, \quad n_3 - k_3 = n_2, \quad n_4 - k_4 = n_3, \quad \dots, \\ n_s = n, \quad n_1 - k_1 = p.$$

Si nous tenons compte de toutes ces relations, nous trouvons

$$\Psi(n, p) = \frac{n!}{p!} \sum \frac{(-1)^t}{k_1! k_2! k_3! \dots k_s!},$$

le signe \sum s'étendant à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \dots, k_s$, tels que l'on ait

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_s = n - p.$$

Considérons maintenant à part cette expression

$$\sum \frac{(-1)^t}{k_1! k_2! k_3! \dots k_s!},$$

où le \sum a l'étendue que nous venons de dire, et désignons-la par a_{n-p} .

La nature de cette quantité est telle que nous avons évidemment, quel que soit t ,

$$a_t + \frac{1}{1!} a_{t-1} + \frac{1}{2!} a_{t-2} + \frac{1}{3!} a_{t-3} + \dots + \frac{1}{t!} a_0 = 0.$$

Cette dernière égalité, et toutes celles qui n'en diffèrent que par la valeur de t , sont évidemment satisfaites si l'on y remplace a_0 par $\frac{(-1)^0}{0!}$; telle est aussi la valeur de a_0 ,

Il s'ensuit que nous avons

$$\Psi(n, p) = (-1)^{n-p} \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

et, par conséquent,

$$U_n = n! \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{p!(n-p)!} (P_p - 1).$$

Ce résultat peut s'écrire successivement

$$U_n = n! \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!} - \sum_1^n (-1)^{n-p} C_n^{n-p}.$$

$$U_n = n! \sum_1^{n-1} \frac{(-1)^t}{t!} + (-1)^n,$$

$$U_n = n! \sum_0^n \frac{(-1)^t}{t!}.$$

Cette dernière égalité nous donne

$$I_n = n! \sum_0^n \frac{(-1)^t}{t!}.$$

17. Cette formule, qui nous donne I_n (¹), est un cas particulier d'une formule plus générale, établie par Laplace à l'aide d'un procédé qui ne ressemble en rien au nôtre. Laplace ne s'est pas arrêté d'ailleurs à ce cas particulier, qui est cependant intéressant. De la solution que nous

(¹) *Théorie analytique des probabilités (Oeuvres)*, t. VII, p. 242.

venons d'exposer, on déduit très-facilement les formules que voici :

$$I_{2n} = \sum_{t=1}^{2n-1} (2n-t) I_{2n-t} + 1,$$

$$I_{2n+1} = \sum_{t=1}^{2n} (2n-t) I_{2n-t}.$$

$$I_n = n I_{n-1} + (-1)^n,$$

$$I_n = (n-1) (I_{n-1} + I_{n-2}),$$

$$I_n = \frac{n!}{e} - \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

De ces cinq formules, les deux premières manifestent une différence caractéristique entre I_{2n} et I_{2n+1} ; la troisième, montrant aussi cette différence, donne un moyen de calculer I_n qui paraît le plus rapide qu'on puisse trouver ; la quatrième montre ce fait curieux que I_n est toujours divisible par $n-1$; la cinquième, enfin, établit une relation entre le nombre I_n et la valeur d'une intégrale définie bien connue.

§ II. — Lois de la deuxième forme.

18. *Généralités.* — Lorsqu'elle affecte cette seconde forme, la loi de la série dépend du premier argument et du second ; mais elle ne dépend pas du troisième. En d'autres termes, à partir d'une certaine valeur de n , la limite λ_n prend une valeur constante λ .

Le terme général est donné par notre formule générale (11) ; et, si l'on n'introduit dans la loi aucune nouvelle particularité, cette formule ne présente pas de simplification.

Il existe une foule de quantités formant des séries qui, se présentant à nous déterminées à la façon des séries récurrentes, nous offrent une loi de cette deuxième forme. Telles sont les intégrales finies ou indéfinies qui se ramènent à des intégrales analogues à l'aide de l'intégration par parties ; les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives de toutes les fractions continues ; les intégrales qu'on désigne par les notations Y_μ, Z_ν , les fonctions X_n de Legendre, les dérivées

successives des fonctions algébriques, la plupart des séries sommées par Stirling, etc., etc.

Nous allons prendre pour exemple particulier une série dans laquelle λ est égal à 3, et dont le terme général se présente sous une forme extrêmement simple.

19. *Application à une série particulière.* — Soit la série dont la loi est définie pour toutes les valeurs de n supérieures à 3, par l'égalité

$$U_n = e^n U_{n-1} + e^{2n-1} U_{n-2} + e^{3n-3} U_{n-3} + e^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

et où l'on a, pour les trois premières valeurs de n ,

$$\begin{aligned} U_1 &= e, \\ U_2 &= e^2 U_1 + e^3, \\ U_3 &= e^3 U_2 + e^5 U_1 + e^6. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, u_n est constamment égal à $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; et, pour toutes les valeurs de n où ils existent, les coefficients $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$, $A_3^{(n)}$ sont respectivement égaux à e^n , e^{2n-1} , e^{3n-3} , le nombre e étant d'ailleurs quelconque.

Nous avons, comme d'ordinaire,

$$\Psi(n, p) = \sum A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2}^{(n_2)} A_{k_3}^{(n_3)} \dots,$$

le signe \sum ayant, dans cette formule, son étendue habituelle, les indices y satisfaisant aux relations connues, et les facteurs A possédant les valeurs que nous venons d'indiquer.

On voit très-facilement que chacun des produits soumis au \sum précédent est égal à $e^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}}$. Si donc on appelle z_p le nombre de ces produits, on a

$$\Psi(n, p) = z_p e^{\frac{n(n+1) - p(p+1)}{2}},$$

et tout revient à déterminer z_p .

Pour y parvenir, considérons les produits, non encore effectués, dont la somme constituait $\Psi(n, p)$. Ceux d'entre eux qui possédaient le plus

de facteurs en possédaient évidemment $n - p$; et ceux qui en présentaient le moins en présentaient ω_p , ce nombre ω_p étant la partie entière du quotient de $n - p + 2$ divisé par 3.

Le nombre des produits présentant t facteurs est égal au nombre des manières dont on peut obtenir la somme $n - p$, par le jet de t dés, offrant chacun trois faces, marquées respectivement 1, 2, 3.

Or, comme nous l'avons dit dans notre *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (1), ce dernier nombre n'est autre que celui des combinaisons régulières d'ordre 2, de t objets, pris $n - p - t$ à $n - p - t$, c'est-à-dire qu'il n'est autre, pour employer notre notation habituelle, que

$$(t, n - p - t)_2.$$

Donc nous avons

$$z_p = \sum_{\omega_p}^{n-p} (t, n - p - t)_2.$$

Il en résulte immédiatement

$$\Psi(n, p) = e^{\frac{n(n+1) - p(p+1)}{2}} \sum_{\omega_p}^{n-p} (t, n - p - t)_2,$$

et, par conséquent, si nous nous rappelons que u_p est égal à $e^{\frac{p(p+1)}{2}}$ et si nous regardons $(0, 0)_2$ comme égal à l'unité,

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_1^n \sum_{\omega_p}^{n-p} (t, n - p - t)_2.$$

Mais c'est une propriété des combinaisons régulières du second ordre, que l'on ait identiquement

$$\sum_1^n \sum_{\omega_p}^{n-p} (t, n - p - t)_2 = \sum_0^t [(n - 2t - 1, 2t)_2 + (n - 2t - 1, 2t + 2)_2],$$

t étant la plus grande valeur de t , qui n'annule pas à la fois les deux expressions

$$(n - 2t - 1, 2t)_2, \quad (n - 2t - 1, 2t + 2)_2.$$

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale*, année 1876, p. 152.

Nous avons donc, en définitive,

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_0^0 [(n-2t-1, 2t)_2 + (n-2t-1, 2t+2)_2].$$

C'est une première expression générale de U_n .

20. Pour en obtenir une seconde, rappelons-nous que $(t, n-p-t)_2$ est le coefficient de x^{n-p-t} dans le développement de $(1+x+x^2)^t$, c'est-à-dire de x^{n-p} dans le développement de $(x+x^2+x^3)^t$. Il en résulte que, si nous posons

$$x + x^2 + x^3 = X,$$

le nombre z_p sera égal au coefficient de x^{n-p} dans la somme

$$X^{n-p} + X^{n-p-1} + X^{n-p-2} + \dots + X^{0_p},$$

c'est-à-dire dans l'expression

$$\frac{X^{n-p+1} - X^{0_p}}{X-1}.$$

Donc on obtiendra z_p en prenant la dérivée $(n-p)^{\text{ième}}$ de cette expression, la divisant par la factorielle $(n-p)!$ et y faisant x égal à zéro. Donc on aura

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_1^n \frac{1}{(n-p)!} \left[D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^{0_p}}{X-1} \right].$$

C'est une seconde expression générale de U_n , qu'on peut mettre aussi sous la forme d'une intégrale définie.

21. Dans cet exemple, il est à remarquer que les coefficients e^n , e^{2n-1} , e^{3n-3} s'assemblent dans chaque expression Ψ , de manière à y former un produit unique qui se met en facteur commun. Il en est ainsi toutes les fois que l'on a, en général,

$$A_k^{(n)} = \varphi(n) \varphi(n-1) \varphi(n-2) \dots \varphi(n-k+1),$$

$\varphi(n)$ désignant une fonction quelconque de n .

Les simplifications qu'apportent avec eux les coefficients de cette nature expliquent pourquoi Stirling a surtout étudié les séries dont la loi présente de tels coefficients.

§ III. — Lois de la troisième forme.

22. *Généralités.* — Lorsque la loi de la série est de cette troisième forme, λ_n et $A_k^{(n)}$ dépendent l'un et l'autre de n ; mais $A_k^{(n)}$ ne dépend pas de k . Pour une valeur déterminée de n , le coefficient $A_k^{(n)}$ a une valeur constante, indépendante de k , que nous désignerons par $A^{(n)}$. La loi peut s'écrire

$$U_n = u_n + A^{(n)} \sum_1^{\lambda_n} U_{n-1}.$$

Le terme général est toujours fourni par notre formule générale (11); mais celle-ci, lorsque la loi est de cette troisième forme, peut être exposée d'une nouvelle façon.

23. Considérons, en effet, le développement de $\Psi(n, p)$. Évidemment l'un quelconque de ses termes est de la forme

$$A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \dots,$$

les indices supérieurs étant des entiers tous différents, dont le dernier est égal à n , dont le premier est supérieur à p , mais non pas à $p + \lambda_{n_1}$, et dont l'un quelconque n_i surpasse le précédent d'un nombre au plus égal à λ_{n_i} . Donc

$$\Psi(n, p) = \sum A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \dots,$$

chacun des produits soumis au \sum présentant des indices supérieurs qui satisfont aux conditions énoncées, et le \sum s'étendant à tous les produits possibles qui offrent de tels indices.

24. Parmi les séries qui sont naturellement déterminées à la façon des séries récurrentes, il n'en existe pour ainsi dire aucune dont la

loi affecte la troisième forme. La loi de la série que nous allons prendre pour exemple ne nous paraît analogue à aucune loi connue.

25. *Application à une série particulière.* — Soit la série définie par les égalités suivantes :

$$U_1 = 1, \quad U_n = n \sum_{i=1}^{\varepsilon} U_{n-i},$$

dans la dernière desquelles ε est égal à 1, à 2 ou à 3, suivant que n est un multiple de 3 moins 1, un multiple de 3, ou finalement un multiple de 3 plus 1.

Dans cet exemple, $A^{(n)}$ est égal à n , de façon que $\Psi(n, 1)$, c'est-à-dire la seule quantité à calculer, est la somme de tous les produits possibles de nombres entiers croissants, dans chacun desquels le premier facteur est 2, 3 ou 4, le dernier n , et où chaque facteur de la forme $3\omega - 1$ surpasse le précédent de 1, chaque facteur de la forme 3ω de 1 ou de 2; chaque facteur de la forme $3\omega + 1$, de 1, de 2 ou de 3. On peut donc former $\Psi(n, 1)$, et par suite U_n , qui lui est égal. La détermination du terme général est donc ainsi effectuée.

26. Mais, pour la série actuelle, on peut parvenir directement à l'expression de U_n , dans les trois cas où n est de la forme $3\omega - 1$, de la forme 3ω , ou de la forme $3\omega + 1$. Considérons pour cela les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} U_{3\alpha-1} &= (3\alpha - 1) U_{3\alpha-2}, \\ U_{3\alpha} &= 3\alpha (U_{3\alpha-1} + U_{3\alpha-2}), \\ U_{3\alpha+1} &= (3\alpha + 1) (U_{3\alpha} + U_{3\alpha-1} + U_{3\alpha-2}). \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\begin{aligned} U_{3\alpha} &= (3\alpha)^2 U_{3\alpha-2}, \\ U_{3\alpha+1} &= (3\alpha + 1)^2 3\alpha U_{3\alpha-2}, \end{aligned}$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} U_{3\alpha+1} &= (3\alpha + 1)^2 (3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \dots 1^2 \cdot 3\alpha \cdot 3(\alpha - 1) \cdot 3(\alpha - 2) \dots 3 \cdot 1, \\ U_{3\alpha} &= (3\alpha)^2 [(3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \dots 1^2 \cdot 3(\alpha - 1) \cdot 3(\alpha - 2) \dots 3 \cdot 1], \\ U_{3\alpha-1} &= (3\alpha - 1) [(3\alpha - 2)^2 (3\alpha - 5)^2 \dots 1^2 \cdot 3(\alpha - 1) \cdot 3(\alpha - 2) \dots 3 \cdot 1]. \end{aligned}$$

Telle est la valeur de U_n pour les trois cas qui peuvent se présenter.

27. Cette possibilité d'évaluer directement $\Psi(n, 1)$ est due à la nature périodique de la loi de la série. En général, toutes les fois que cette loi est très-régulière et qu'elle affecte cette troisième forme, on peut obtenir l'expression du terme général directement, par des considérations analogues aux précédentes. Ces résultats obtenus directement, lorsqu'on les égale aux sommes fournies par notre formule générale, donnent des identités nombreuses, peut-être difficiles à établir autrement.

§ IV. — Lois de la quatrième forme.

28. *Généralités.* — Lorsque la loi affecte cette quatrième forme, $A_k^{(n)}$ dépend de n , mais non pas de k , et λ_n devient constant à partir d'une certaine valeur de n .

Soient λ le nombre constant auquel λ_n devient égal, et $A^{(n)}$ la valeur, indépendante de k , que prend $A_k^{(n)}$ pour une valeur déterminée de n . La loi de la série peut s'écrire

$$U_n = u_n + A^{(n)} \sum_k^{\lambda} U_{n-k}.$$

29. Quant à la quantité $\Psi(n, p)$, nous avons vu, dans notre étude de la forme précédente, qu'elle est égale à

$$\sum A^{(n_1)} A^{(n_2)} A^{(n_3)} \dots,$$

les indices supérieurs étant des entiers tous différents, dont le dernier est égal à n , dont le premier est supérieur à p , mais non pas à $p + \lambda_{n_1}$, et dont l'un quelconque n_i surpasse le précédent d'un nombre au plus égal à λ_{n_i} .

Ici nous pouvons, dès que n est assez grand, remplacer λ_n par λ .

30. Parmi les lois des séries déterminées à la façon des séries récurrentes, celles qui affectent cette quatrième forme ne se rencontrent pas plus fréquemment que celles qui affectent la troisième. Dans l'impossibilité, absolue peut-être, de rencontrer un exemple, nous avons dû en imaginer un.

31. *Application à une série particulière.* — Soit la série définie par les égalités suivantes :

$$U_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}},$$

$$U_2 = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}} U_1,$$

et, en général, pour toutes les valeurs de n supérieures à 2,

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}} (U_{n-1} + U_{n-2}),$$

égalités dans lesquelles a est un nombre positif quelconque.

Dans cet exemple, évidemment nous avons

$$u_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}},$$

$$u_2 = 0,$$

et, pour toute valeur de n supérieure à 2,

$$u_n = 0,$$

$$\lambda_n = 2,$$

$$A^{(n)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}}.$$

Il s'ensuit que l'expression $\Psi(n, 1)$, la seule qu'il faille calculer pour obtenir U_n , est égale à

$$\sum \frac{\sqrt[n_1]{a}}{\sqrt[n_1+1]{a} + \sqrt[n_1+2]{a}} \frac{\sqrt[n_2]{a}}{\sqrt[n_2+1]{a} + \sqrt[n_2+2]{a}} \frac{\sqrt[n_3]{a}}{\sqrt[n_3+1]{a} + \sqrt[n_3+2]{a}} \dots,$$

le signe \sum s'étendant à tous les produits de cette forme, tels que, dans chacun d'eux, le premier indice supérieur soit égal à 2 ou à 3, le dernier à n , et que chaque indice supérieur surpasse le précédent de une ou de deux unités.

Comme U_n est égal à $u, \Psi(n, 1)$, il suffit de multiplier le \sum précédent par u , pour obtenir précisément l'expression cherchée du terme général U_n de la série.

32. Cette série est assez remarquable; sa loi, en effet, est telle, qu'on peut très-facilement, d'abord établir que des termes consécutifs tendent à devenir égaux à mesure qu'on s'éloigne du commencement de la série; ensuite démontrer que U_n tend alors vers une limite déterminée; enfin obtenir la valeur même de cette limite.

Considérons d'abord le coefficient $A^{(n)}$, qui est égal à

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}}.$$

Il tend évidemment vers $\frac{1}{2}$ lorsque n croit au delà de toute limite; par suite, chaque terme tend à devenir la moyenne arithmétique entre les deux précédents; par suite, les termes tendent à devenir tous égaux.

Il s'ensuit évidemment que le terme général U_n tend vers une limite déterminée.

Passons maintenant à l'égalité

$$(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a})U_n = \sqrt[n]{a}(U_{n-1} + U_{n-2}),$$

qui exprime la loi de la série, et, à ses deux membres, ajoutons la même quantité $\sqrt[n+1]{a}U_{n-1}$. Nous trouvons

$$(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a})U_n + \sqrt[n+1]{a}U_{n-1} = (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n+1]{a})U_{n-1} + \sqrt[n]{a}U_{n-2},$$

et ce résultat nous montre immédiatement que l'expression

$$(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a})U_n + \sqrt[n+1]{a}U_{n-1}$$

est constante, quel que soit n ; par conséquent, cette expression est égale à

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{a})U_2 + \sqrt[3]{a}U_1,$$

c'est-à-dire à a .

Donc, pour toute valeur de n ,

$$(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a})U_n + \sqrt[n+1]{a}U_{n-1} = a.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, $\sqrt[n+1]{a}$ et $\sqrt[n+2]{a}$ tendent chacun vers l'unité; U_n et U_{n-1} tendent chacun vers la même limite. Donc

$$\lim U_n = \frac{a}{3}.$$

33. Les transformations qui nous ont permis d'obtenir cette limite nous donnent aussi le moyen d'arriver à une nouvelle expression de U_n . Nous en tirons, en effet,

$$U_n = - \frac{n+\sqrt[n]{a}}{n+\sqrt[n]{a} + n+\sqrt[n+2]{a}} U_{n-1} + \frac{a}{n+\sqrt[n]{a} + n+\sqrt[n+2]{a}},$$

nouvelle loi qui nous donne, pour toutes les valeurs de n ,

$$u_n = \frac{a}{n+\sqrt[n]{a} + n+\sqrt[n+2]{a}},$$

et, pour toutes les valeurs de n supérieures à l'unité,

$$\lambda_n = 1, \\ A^{(n)} = - \frac{n+\sqrt[n]{a}}{n+\sqrt[n]{a} + n+\sqrt[n+2]{a}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\Psi(n, p) = (-1)^{n-p} \prod_{p+1}^n \frac{t+\sqrt[t]{a}}{t+\sqrt[t]{a} + t+\sqrt[t+2]{a}},$$

et, par conséquent,

$$U_n = a \sum_1^n \left[\frac{(-1)^{n-p}}{p+\sqrt[p]{a} + p+\sqrt[p+2]{a}} \prod_{p+1}^n \frac{t+\sqrt[t]{a}}{t+\sqrt[t]{a} + t+\sqrt[t+2]{a}} \right].$$

§ V. — Lois de la cinquième forme.

34. *Généralités.* — Lorsque la loi de la série affecte cette cinquième forme, la limite λ_n dépend de n , mais le coefficient $A_k^{(n)}$ n'en dépend pas; ce dernier varie seulement avec k . Si l'on considère une valeur déterminée de k , $A_k^{(n)}$ prend une valeur constante et indépendante de n , que nous désignons par A_k .

Le terme général est, comme toujours, donné par notre formule générale; mais celle-ci, si l'on n'introduit dans la loi aucune nouvelle particularité, ne présente point de simplification. Il suffirait de supposer que λ_n croît toujours pour arriver à une formule beaucoup plus simple.

Il est très-rare qu'une série, déterminée à la façon des séries récurrentes, présente une loi de cette cinquième forme. Nous allons donner, comme application, une série assez simple, qu'on n'a point encore étudiée.

35. *Application à une série particulière.* — Soit la série déterminée par les relations

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 U_{n-k},$$

$$u_1 = 1.$$

Nous avons évidemment, dans le cas actuel, pour toute valeur de n supérieure à l'unité,

$$u_n = 0,$$

et, en général,

$$\lambda_n = n - 1,$$

$$\Lambda_k = k^2.$$

A cause de l'absence des termes tout connus autres que u_1 , le calcul se réduit simplement à la détermination de $\Psi(n, 1)$. Or il est évident qu'un terme quelconque du développement de $\Psi(n, 1)$ est égal à

$$1^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma} \dots (n-1)^{\omega},$$

$1, 2, 3, \dots, n-1$ étant des valeurs particulières de k , et $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ des exposants correspondants, entiers positifs ou nuls, satisfaisant d'ailleurs à l'égalité

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + (n-1)\omega = n-1.$$

Il importe seulement de savoir le nombre de fois z qu'un pareil terme se présente dans ce développement. Ce nombre est évidemment celui des permutations de $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \omega$ nombres, dont α sont égaux à 1, β à 2, γ à 3, \dots , ω à $n-1$. Ce nombre, on le sait, est égal à

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \omega)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \omega!}.$$

Nous avons donc finalement, puisque U_n est égal à $\Psi(n, 1)$,

$$U_n = \sum \frac{(\alpha + \beta + \dots + \omega)!}{\alpha! \beta! \dots \omega!} 1^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \dots (n-1)^{\omega},$$

le signe \sum s'étendant à toutes les solutions en nombres entiers nuls ou positifs de l'égalité déjà décrite

$$1\alpha + 2\beta + \dots + (n-1)\omega = n-1.$$

36. Pour obtenir une autre expression de U_n , remarquons que, dans les différents termes du \sum précédent, l'expression $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \omega$ peut prendre toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., $n-1$, mais aucune autre. La somme des termes où cette expression est égale à t , si nous posons

$$X = 1^t x + 2^t x^2 + 3^t x^3 + \dots + (n-1)^t x^{n-1},$$

n'est autre que le coefficient de x^{n-1} dans le développement de X^t . Donc U_n est le coefficient de x^{n-1} dans $X^1 + X^2 + \dots + X^{n-1}$, c'est-à-dire dans le développement de $\frac{X^n - X}{X-1}$. Donc nous avons, en nous servant des dérivées par rapport à x ,

$$U_n = \frac{1}{(n-1)!} \left(D_x^{n-1} \frac{X^n - X}{X-1} \right),$$

et cette expression, comme toutes les expressions analogues que nous obtiendrons par la suite, peut se mettre sous la forme d'une intégrale définie.

§ VI. — Lois de la sixième forme.

37. *Généralités.* — Dans le cas de cette sixième forme, le coefficient $A_k^{(n)}$ dépend de k , mais non pas de n ; la limite λ_n devient, à partir d'un certain rang, égale à la constante λ ; et la loi même de la série peut s'écrire

$$U_n = u_n + P_1 U_{n-1} + P_2 U_{n-2} + \dots + P_\lambda U_{n-\lambda},$$

$P_1, P_2, \dots, P_\lambda$ étant des constantes quelconques.

L'expression de U_n peut être considérablement simplifiée, si l'on suppose que λ_n , avant de devenir constant, va toujours en croissant. Comme il est évident d'ailleurs qu'on peut toujours prendre pour premier terme U , un terme assez éloigné pour qu'il en soit ainsi, nous pouvons regarder cette condition comme toujours remplie.

38. Supposons-la donc satisfaite et déterminons $\Psi(n, p)$.

Évidemment cette quantité est la somme de plusieurs produits de la forme $P_1^\alpha P_2^\beta P_3^\gamma \dots P_\lambda^\omega$, dans chacun desquels les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ sont des entiers quelconques, positifs ou nuls, satisfaisant à l'égalité

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + \lambda\omega = n - p.$$

Celui de ces produits qui nous sert de type se trouve répété un nombre de fois égal au nombre des permutations de $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \omega$ lettres, dont α sont égales à P_1 , β à P_2 , γ à P_3 , \dots , ω à P_λ . Or ce nombre de permutations est

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \omega)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \omega!};$$

donc, si nous convenons d'étendre le \sum ci-dessous à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, des exposants qui satisfont à l'égalité écrite plus haut, nous avons

$$\Psi(n, p) = \sum \frac{(\alpha + \beta + \dots + \omega)!}{\alpha! \beta! \dots \omega!} P_1^\alpha P_2^\beta \dots P_\lambda^\omega,$$

de façon que U_n est déterminé, puisque nous savons que

$$U_n = u_n \Psi(n, n) + u_{n-1} \Psi(n, n-1) + u_{n-2} \Psi(n, n-2) + \dots$$

C'est une expression simple et générale de U_n .

39. Pour en obtenir une nouvelle, considérons l'expression précédente de $\Psi(n, p)$. Dans les différents produits dont elle est la somme, l'expression $\alpha + \beta + \dots + \omega$ n'est jamais ni supérieure à $n - p$, ni inférieure à θ_p , ce nombre θ_p étant la partie entière du quotient de $n - p + \lambda - 1$ par λ . La somme des termes où $\alpha + \beta + \dots + \omega$ est égal à t , si nous posons

$$X = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \dots + P_\lambda x^\lambda,$$

n'est autre que le coefficient de x^{n-p} dans le développement de X^t . Donc $\Psi(n, p)$ est juste le coefficient de x^{n-p} dans la somme

$$X^{n-p} + X^{n-p-1} + X^{n-p-2} + \dots + X^{\theta_p},$$

c'est-à-dire dans le développement de

$$\frac{X^{n-p+1} - X^0}{X-1};$$

donc nous avons

$$\Psi(n, p) = \frac{1}{(n-p)!} \left(D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^0}{X-1} \right),$$

donc

$$U_n = u_n + \frac{u_{n-1}}{1!} \left(D_x \frac{X^1 - X^0}{X-1} \right) + \frac{u_{n-2}}{2!} \left(D_x^2 \frac{X^2 - X^0}{X-1} \right) + \dots$$

40. Ces deux expressions générales de U_n ont chacune leurs inconvénients et leurs avantages. La première demande plus d'explications; la seconde s'explique pour ainsi dire d'elle-même. La première exige un calcul plus court, mais plus difficile; la seconde, un calcul plus long, mais presque mécanique. La grande supériorité de la première, c'est qu'elle pénètre bien plus avant dans la nature de la quantité à calculer.

Quoi qu'il en soit, ces deux formules donnent, pour ce cas, le moyen d'écrire l'expression de U_n , sans qu'il soit besoin de résoudre au préalable la moindre équation.

41. C'est dans les séries dont la loi affecte cette sixième forme que rentrent la plupart des séries récurrentes proprement dites, et des séries considérées par Lagrange. On y pourrait ramener très-facilement la recherche des développements, soit de $\sin nx$, soit de $\cos nx$, en fonction de $\sin x$ seul ou de $\cos x$ seul.

Nous allons appliquer ce qui précède à la détermination de la somme des puissances semblables des racines d'une équation, c'est-à-dire au problème fameux, résolu pour la première fois par Waring.

42. *Application au problème de Waring.* — On sait que, si l'on désigne par S_1, S_2, S_3, \dots les sommes des puissances $1^{\text{re}}, 2^{\text{e}}, 3^{\text{e}}, \dots$ des racines de l'équation algébrique du degré m

$$x^m + T_1 x^{m-1} + T_2 x^{m-2} + \dots + T_{m-1} x + T_m = 0,$$

on sait, disons-nous, que S_n est reliée aux quantités S précédentes,

lorsque n ne surpasse pas m , par la relation

$$S_n + T_1 S_{n-1} + T_2 S_{n-2} + \dots + T_{n-1} S_1 + n T_n = 0,$$

qui est due à Newton, et, lorsque n surpasse m , par l'égalité évidente

$$S_n + T_1 S_{n-1} + T_2 S_{n-2} + \dots + T_{m-1} S_{n-m+1} + T_m S_{n-m} = 0.$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\lambda = m,$$

$$P_1 = -T_1, \quad P_2 = -2T_2, \quad P_3 = -3T_3, \quad \dots, \quad P_m = -mT_m,$$

$$u_1 = -1T_1, \quad u_2 = -2T_2, \quad u_3 = -3T_3, \quad \dots, \quad u_m = -mT_m,$$

et aussi

$$u_{m+q} = 0,$$

quel que soit l'entier supérieur à zéro, que nous désignons par q .

Nous avons, par conséquent,

$$S_n = -T_1 \Psi(n, 1) - 2T_2 \Psi(n, 2) - 3T_3 \Psi(n, 3) - \dots - sT_s \Psi(n, s),$$

s étant égal à n , si n ne dépasse pas m , et à m dans tous les autres cas.

Pour la série actuelle, nous avons d'ailleurs

$$\Psi(n, p) = \sum (-1)^{s+p+\dots} \frac{(x + \beta + \dots)!}{\alpha! \beta! \dots} T_1^s T_2^p \dots$$

Il en résulte une première expression générale de S_n .

43. Pour en obtenir une seconde, considérons la formule générale qui précède (39). En l'appliquant littéralement au cas actuel, nous posons

$$X = -(T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \dots + T_m x^m),$$

et nous trouvons facilement

$$S_n = - \sum_p \frac{p T_p}{(n-p)!} \left(D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^p}{X-1} \right),$$

s ayant la même signification que ci-dessus (42), et $\hat{\sigma}_p$ désignant la partie entière du quotient de $n-p+m-1$ par m .

44. Revenons à la première formule (42) trouvée pour S_n . Quel que soit p , $\Psi(n, p)$ y est multiplié par $-pT_p$; par suite, dans S_n effectuée, tous les termes seront des produits $T_1^{\alpha} T_2^{\beta} T_3^{\gamma} \dots$, tels que

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n.$$

Il est évident, de plus, qu'on y trouvera tous les produits de cette forme, dont les exposants satisfont à cette condition. Mais combien de fois y rencontrera-t-on chacun d'eux? Pour répondre à cette question, soit

$$T_q^q, T_r^r, T_s^s,$$

l'un quelconque de ces produits, où nous ne marquons que les T dont l'exposant n'est pas nul. Évidemment ce produit ne se présentera que dans les termes

$$-q^q T_q^q \Psi(n, q^q), \quad -r^r T_r^r \Psi(n, r^r), \quad -s^s T_s^s \Psi(n, s^s).$$

Or les nombres de fois qu'il entre dans ces différents termes sont respectivement

$$\begin{aligned} q^q (-1)^{q+q+s} \frac{(q-1+r+s)!}{(q-1)! r! s!}, \\ r^r (-1)^{q+r+s} \frac{(q+r-1+s)!}{q! (r-1)! s!}, \\ s^s (-1)^{q+r+s} \frac{(q+r+s-1)!}{q! r! (s-1)!}; \end{aligned}$$

donc le nombre de fois qu'il entre dans S_n est égal à

$$(qq^q + rr^r + ss^s) (-1)^{q+r+s} \frac{(q+r+s-1)!}{q! r! s!}.$$

Mais ce résultat est général, et la somme $qq^q + rr^r + ss^s$ est égale à n ; donc finalement

$$S_n = n \sum (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\omega} \frac{(\alpha+\beta+\dots+\omega-1)!}{\alpha! \beta! \dots \omega!} T_1^{\alpha} T_2^{\beta} \dots T_m^{\omega},$$

la caractéristique $\sum s$ 'étendant à tous les systèmes de valeurs des nombres $\alpha, \beta, \dots, \omega$, tels que l'on ait

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + m\omega = n.$$

Cette troisième expression de S_n est justement la formule de Waring (1).

45. Dans cette formule de Waring, considérons l'un quelconque des produits soumis au \sum . Soit t la valeur de $\alpha + \beta + \dots + \omega$ dans ce produit. La somme de tous les produits, où cette valeur est la même, n'est autre que le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{1}{t} X^t$, le polynôme X étant défini comme plus haut (43). Or ce nombre t prend dans ce \sum toutes les valeurs entières non supérieures à n , mais non inférieures à θ , ce nombre θ étant la partie entière du quotient de $n + m - 1$ par m . Donc le \sum tout entier est le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{X^n}{n} + \frac{X^{n-1}}{n-1} + \frac{X^{n-2}}{n-2} + \dots + \frac{X^\theta}{\theta}.$$

Donc on a, en désignant par la caractéristique D_x^n la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à x ,

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!} \left[D_x^n \left(\frac{X^n}{n} + \frac{X^{n-1}}{n-1} + \dots + \frac{X^\theta}{\theta} \right) \right].$$

Appelons Y la dérivée première, par rapport à x , du polynôme X ; nous pouvons écrire immédiatement

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!} \left[D_x^{n-1} \left(\frac{X^n - X^{n-1}}{X-1} Y \right) \right].$$

C'est une quatrième expression générale de S_n .

§ VII. — Lois de la septième forme.

46. *Généralités.* — La loi affectant cette forme, $A_k^{(n)}$ ne dépend ni de n ni de k ; en d'autres termes, tous les coefficients sont égaux à une même constante a ; mais λ_n est fonction de n . La loi de la série peut

(1) *Meditationes algebraicæ*, in-4°, Cantabrigiæ, 1782. — Probl. I, p. 1.

s'écrire

$$U_n = u_n + a \sum_1^{\lambda_n} U_{n-1}.$$

Le terme général s'exprime toujours à l'aide de notre formule générale, et, si l'on ne fait aucune hypothèse sur la nature de λ_n , considéré comme fonction de n , cette formule ne se simplifie point.

On trouve peu de séries dont la loi ait cette forme. En voici une assez simple.

47. *Application à une série particulière.* — Soit la série déterminée par les égalités

$$u_1 = 1, \quad U_n = a \sum_1^{n-1} U_{n-1}.$$

Nous avons évidemment

$$U_n = \Psi(n, 1),$$

et, d'après sa définition, $\Psi(n, 1)$ est la somme de termes égaux aux diverses puissances de a , depuis la première jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$. Combien de fois a^t se trouve-t-il dans cette somme? Autant de fois qu'il y a de manières d'obtenir la somme $n-1$, par le jet de t dés, présentant chacun $n-1$ faces, marquées $1, 2, 3, \dots, n-1$.

Ce nombre est celui des combinaisons régulières, d'ordre $n-2$, de t lettres, prises $n-1-t$ à $n-1-t$. Or le nombre de ces combinaisons régulières, à cause que l'ordre en est supérieur ou égal au nombre des lettres de chaque combinaison, se confond ⁽¹⁾ avec celui des combinaisons complètes de t lettres $n-1-t$ à $n-1-t$, lequel, à son tour, n'est autre que le nombre des combinaisons simples de $n-2$ lettres $t-1$ à $t-1$; donc, si nous désignons ce dernier nombre par C_{n-2}^{t-1} , nous avons

$$U_n = \sum_1^{n-1} C_{n-2}^{t-1} a^t.$$

Telle est l'expression de notre terme général.

(1) Voir notre *Mémoire sur les combinaisons régulières*, cité plus haut.

48. Cette expression peut s'écrire

$$U_n = a \sum_{t=1}^{n-1} C_{n-2}^{t-1} a^{t-1},$$

et, comme le nouveau \sum est juste égal à $(1+a)^{n-2}$, nous avons

$$U_n = a(1+a)^{n-2}.$$

49. Grâce à cette particularité que λ_n est égal à $n-1$, on peut obtenir directement ce dernier résultat. La loi de la série se transforme, en effet, très-facilement en celle-ci :

$$U_n = (1+a)U_{n-1}.$$

Or cette dernière formule, jointe aux deux égalités

$$U_1 = 1, \quad U_2 = aU_1,$$

nous donne immédiatement

$$U_n = a(1+a)^{n-1}.$$

50. Il est à remarquer que, si l'on ignorait la formule du binôme, on la trouverait en égalant nos deux expressions de U_n .

§ VIII. — Lois de la huitième forme.

51. *Généralités.* — Dans ce dernier cas, la loi de la série ne dépend d'aucun des trois arguments; en d'autres termes, dans le tableau des coefficients (13), les termes sont tous égaux, soit dans les colonnes verticales, soit dans les lignes horizontales; et, de plus, la longueur de ces dernières, à partir d'un certain moment, devient absolument constante, après avoir, comme nous pouvons toujours le supposer, été jusque-là constamment en croissant.

Si nous désignons par λ la valeur constante de λ_n , et par a celle de $A_t^{(n)}$, la loi de la série peut s'écrire alors

$$U_n = u_n + a \sum_{t=1}^{\lambda} U_{n-t}.$$

52. Le terme général U_n prend, dans ce cas, une forme très-simple. On a toujours, nous le savons,

$$U_n = \sum_p^n u_p \Psi(n, p).$$

Or, dans le cas actuel, $\Psi(n, p)$ est évidemment la somme de termes tous égaux à des puissances de a , dont le plus fort exposant est $n - p$, et le plus faible θ_p , ce nombre θ_p étant la partie entière du quotient de $n - p + \lambda - 1$ divisé par λ .

Combien de fois le terme a^t entre-t-il dans cette somme? Autant de fois qu'il y a de manières d'obtenir la somme $n - p$ par le jet de t dés, présentant chacun λ faces, marquées respectivement $1, 2, 3, \dots, \lambda$. Mais ce nombre de manières est égal à $(t, n - p - t)_{\lambda-1}$, si, conformément à notre notation habituelle, nous désignons par cette expression le nombre des combinaisons régulières, d'ordre $\lambda - 1$, de t lettres, $n - p - t$ à $n - p - t$; donc nous avons identiquement

$$\Psi(n, p) = \sum_p^{n-p} a^t (t, n - p - t)_{\lambda-1},$$

et, en portant cette expression dans la valeur précédente de U_n , nous obtenons l'expression générale de U_n , ordonnée suivant les quantités connues $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$.

53. Nous pouvons obtenir une autre expression générale de U_n . En effet, $a^t (t, n - p - t)_{\lambda-1}$ n'est autre chose que le coefficient de x^{n-p} dans le développement de $(ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^\lambda)^t$, c'est-à-dire, si nous appelons X le polynôme entre parenthèses, dans le développement de X^t ; donc $\Psi(n, p)$ est le coefficient de x^{n-p} dans l'expression

$$X^{n-p} + X^{n-p-1} + X^{n-p-2} + \dots + X^{\theta_p},$$

c'est-à-dire dans

$$\frac{X^{n-p+1} - X^{\theta_p}}{X - 1}$$

et, par suite,

$$U_n = \sum_p^n \frac{u_p}{(n-p)!} \left(D_x^{n-p} \frac{X^{n-p+1} - X^{\theta_p}}{X - 1} \right).$$

54. La loi des séries récurrentes proprement dites et des séries de Lagrange, toutes les fois qu'elle n'est pas de la sixième forme, appartient à la huitième. La loi des séries de Cassini est toujours de la huitième. Nous allons considérer une série analogue aux séries de Cassini.

55. *Application à une série particulière.* — Soit la série dont chaque terme est égal à la somme des trois précédents multipliés par a . Supposons les trois premiers termes donnés par les égalités

$$\begin{aligned}U_1 &= 1, \\U_2 &= aU_1, \\U_3 &= a(U_1 + U_2).\end{aligned}$$

Le terme général sera identique à $\Psi(n, 1)$. Si nous appliquons la première formule, nous aurons

$$U_n = \sum_{t=0}^{n-1} a^t (t, n-1-t)_2,$$

\mathcal{G}_1 étant la partie entière du quotient de $n+1$ par 3. Si nous appliquons la seconde, nous avons

$$U_n = \frac{1}{(n-1)!} \left(D_x^{n-1} \frac{X^n - X^1}{X-1} \right).$$

Telles sont nos deux expressions de U_n .

SUR LES
PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DES FONCTIONS

ET SUR
LES LIGNES ISOTHERMES PERMANENTES,

PAR M. É. COMBESURE,
 PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

PREMIÈRE PARTIE.

Remarques sur quelques formules relatives aux déterminants.

1. Soit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & \dots & (au) \\ (ab) & (bb) & \dots & (bu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (au) & (bu) & \dots & (uu) \end{vmatrix} = R$$

le carré d'un déterminant dans lequel les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots$, sont des quantités quelconques, et où, pour abrégé,

$$(aa) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, \quad (ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \dots$$

Le déterminant R peut se représenter par les n formes quadratiques

$$R = R^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial (aa)} a_i^2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial (uu)} u_i^2 + \frac{\partial R}{\partial (ab)} a_i b_i + \dots,$$

i désignant un quelconque des nombres 1, 2, ..., n ; et si l'on pose

$$r_{ab}^{(i)} = a_1 \frac{\partial b_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial b_2}{\partial t} + \dots + a_n \frac{\partial b_n}{\partial t},$$

d'où résulte

$$r_{ab}^{(i)} + r_{ba}^{(i)} = \frac{\partial(ab)}{\partial t},$$

t étant une variable indépendante quelconque, on a

$$(1) \quad 2R \frac{\partial a_i}{\partial t} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial a_i} r_{aa}^{(i)} + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial b_i} r_{ba}^{(i)} + \dots + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial u_i} r_{ua}^{(i)}.$$

Si l'on introduit une autre variable indépendante (s) et que l'on considère l'équation analogue à (1), savoir :

$$(1') \quad 2R \frac{\partial a_i}{\partial s} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial a_i} r_{aa}^{(s)} + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial b_i} r_{ba}^{(s)} + \dots + \frac{\partial R^{(i)}}{\partial u_i} r_{ua}^{(s)},$$

on aura, pour $i = 1, 2, \dots, n$, deux systèmes comprenant chacun n équations linéaires par rapport à $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; u_1, u_2, \dots$, et si l'on regarde toutes les autres quantités comme connues, les conditions pour que ces équations puissent avoir lieu en même temps seront

$$(2) \quad R \left(\frac{\partial r_{hk}^{(s)}}{\partial t} - \frac{\partial r_{hk}^{(t)}}{\partial s} \right) = \frac{\partial R}{\partial (aa)} (r_{ah}^{(t)} r_{ak}^{(s)} - r_{ah}^{(s)} r_{ak}^{(t)}) + \dots + \frac{\partial R}{\partial (ab)} (r_{ah}^{(t)} r_{bk}^{(s)} - r_{ah}^{(s)} r_{bk}^{(t)}) + \dots$$

h et k désignant deux quelconques des lettres a, b, \dots, u .

J'ai établi ces formules (avec des notations différentes), dans le tome IV (1^{re} série) de ce journal. On connaissait depuis longtemps la forme des équations (1) et (1'), lorsque $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ étaient, dans un certain ordre, les dérivées partielles de n fonctions de n variables indépendantes; mais, même dans ce cas spécial, on n'avait pas établi, dans leur généralité, les équations qui correspondent à (2).

Cas des déterminants fonctionnels : première forme.

2. Lorsque, considérant n fonctions x, y, z, \dots, u des n variables indépendantes, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$, on suppose

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & a_2 &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \dots, & a_n &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ b_1 &= \frac{\partial x}{\partial \beta}, & b_2 &= \frac{\partial y}{\partial \beta}, & \dots, & b_n &= \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ c_1 &= \frac{\partial x}{\partial \gamma}, & c_2 &= \frac{\partial y}{\partial \gamma}, & \dots, & & \end{aligned}$$

de sorte que

$$(aa) = \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \quad (ab) = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \dots,$$

en supposant que t et s désignent deux quelconques des variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$, la combinaison de

$$r_{ab}^{(t)} + r_{ba}^{(t)} = \frac{\partial(ab)}{\partial t}$$

avec

$$\frac{\partial a_1}{\partial \beta} = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \beta} = \frac{\partial b_2}{\partial \alpha}, \quad \dots$$

fournit

$$(3) \quad r_{ab}^{(\gamma)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(ab)}{\partial \gamma} + \frac{\partial(ac)}{\partial \beta} - \frac{\partial(bc)}{\partial \alpha} \right],$$

ce qui donne l'expression des $r_{ab}^{(t)}$ au moyen des dérivées partielles de $(aa), (ab), \dots$

Si l'on introduit ces expressions dans les équations (2), il est facile de voir qu'elles sont les équations distinctes que l'on obtient. Par exemple, pour trois fonctions x, y, z de α, β, γ , on a seulement six équations distinctes qui, abstraction faite du facteur R, amènent aux premiers membres de (2) les six quantités comprises dans les deux types

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial^2(aa)}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial(ab)}{\partial \gamma} + \frac{\partial(ac)}{\partial \beta} - \frac{\partial(bc)}{\partial \alpha} \right], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2(aa)}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(bb)}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2(ab)}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{array} \right.$$

les seconds membres ne renfermant que des dérivées premières.

Si l'on voulait introduire dans le calcul, comme éléments essentiels, les quantités

$$(\alpha\alpha) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial \alpha^2}{\partial u^2}, \quad (x\beta) = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial u}, \quad \dots,$$

qui constituent ce que l'on appelle [du moins les $(\alpha\alpha), (\beta\beta), \dots, (\nu\nu)$] les *paramètres différentiels du premier ordre* des fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$, il suffirait d'employer les formules connues qui permettent d'exprimer les (ab) en fonction des $(\alpha\beta)$ et de substituer dans les formules

(1), (2), (3), (4), en supposant que t et s désignent toujours deux quelconques des variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$; mais il est plus simple de revenir aux relations du n° 1.

Déterminants fonctionnels : deuxième forme.

3. Je poserai

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial x}{\partial x}, & \alpha_2 &= \frac{\partial x}{\partial y}, & \dots, & \alpha_n &= \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \beta_1 &= \frac{\partial \beta}{\partial x}, & \beta_2 &= \frac{\partial \beta}{\partial y}, & \dots, & \beta_n &= \frac{\partial \beta}{\partial u}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ \nu_1 &= \frac{\partial \nu}{\partial x}, & \nu_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial y}, & \dots, & \nu_n &= \frac{\partial \nu}{\partial u}. \end{aligned}$$

Cela étant, si, dans le déterminant R, n° 1, on suppose

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1, & a_2 &= \alpha_2, & \dots, & a_n &= \alpha_n, \\ b_1 &= \beta_1, & b_2 &= \beta_2, & \dots, & b_n &= \beta_n, \end{aligned}$$

en sorte que

$$\begin{aligned} (aa) &= (\alpha\alpha) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial \alpha^2}{\partial u^2}, \\ (ab) &= (\alpha\beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial u}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

en prenant

$$r_{ab}^{(t)} = r_{a\beta}^{(t)} = \sum \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial t},$$

le Σ se rapportant aux indices et t étant une quelconque des variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$, les formules (1), (2) subsisteront comme toujours, et la question est d'exprimer actuellement les $r_{a\beta}^{(t)}$ au moyen des $(\alpha\alpha)$ $(\alpha\beta)$ et de leurs dérivées premières. On a pour cela les relations

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = 0, \dots$$

En prenant $\alpha, \beta, \dots, \nu$ pour variables indépendantes, ces relations reviennent aux suivantes, où la première, qui est identique, a été in-

trouite auxiliairement,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \dots + \nu_1 \frac{\partial x_1}{\partial \nu} - \left(\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \dots + \nu_1 \frac{\partial x_1}{\partial \nu} \right) &= 0, \\ \alpha_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dots + \nu_2 \frac{\partial x_2}{\partial \nu} - \left(\alpha_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dots + \nu_2 \frac{\partial x_2}{\partial \nu} \right) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \alpha_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \beta_n \frac{\partial x_n}{\partial \beta} + \dots + \nu_n \frac{\partial x_n}{\partial \nu} - \left(\alpha_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \beta_n \frac{\partial x_n}{\partial \beta} + \dots + \nu_n \frac{\partial x_n}{\partial \nu} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a d'autres groupes analogues. En multipliant ces équations par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, où γ est une quelconque des variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$, et ajoutant les produits, on aura la première du groupe suivant, les autres équations étant obtenues par un procédé analogue,

$$\begin{aligned} (\alpha\gamma) \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \dots + (\nu\gamma) \frac{\partial x_1}{\partial \nu} - \alpha_1 r_{\gamma\alpha}^{(\alpha)} - \beta_1 r_{\gamma\alpha}^{(\beta)} - \dots - \nu_1 r_{\gamma\alpha}^{(\nu)} &= 0, \\ (\alpha\gamma) \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dots + (\nu\gamma) \frac{\partial x_2}{\partial \nu} - \alpha_2 r_{\gamma\alpha}^{(\alpha)} - \beta_2 r_{\gamma\alpha}^{(\beta)} - \dots - \nu_2 r_{\gamma\alpha}^{(\nu)} &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ (\alpha\gamma) \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + (\beta\gamma) \frac{\partial x_n}{\partial \beta} + \dots + (\nu\gamma) \frac{\partial x_n}{\partial \nu} - \alpha_n r_{\gamma\alpha}^{(\alpha)} - \beta_n r_{\gamma\alpha}^{(\beta)} - \dots - \nu_n r_{\gamma\alpha}^{(\nu)} &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, x étant une autre quelconque des variables indépendantes, en multipliant ces équations par x_1, x_2, \dots, x_n et ajoutant, on obtiendra

$$(5) \quad (\alpha\gamma) r_{x\alpha}^{(\alpha)} + (\beta\gamma) r_{x\alpha}^{(\beta)} + \dots + (\nu\gamma) r_{x\alpha}^{(\nu)} - (\alpha x) r_{\gamma\alpha}^{(\alpha)} - (\beta x) r_{\gamma\alpha}^{(\beta)} - \dots - (\nu x) r_{\gamma\alpha}^{(\nu)} = 0.$$

Cette équation multiple, dans laquelle deux ou trois des quatre lettres α, β, γ, x peuvent coïncider, servira, en y joignant

$$r_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + r_{\beta\alpha}^{(\beta)} = \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial t},$$

à résoudre la question particulière, que l'on s'était posée, d'exprimer les $r_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$ par les $(\alpha\beta)$ et leurs dérivées premières. Je ne m'occuperai pas des formules définitives propres à ce dernier objet; je ferai remarquer seulement que les premiers membres des équations (2) ne conserveront plus la forme caractéristique qui convient au cas en quelque sorte inverse du n° 2 [la forme (4) pour trois variables par exemple]. Or cõme, dans les recherches particulières qu'on peut avoir en vue, la partie la plus importante en général est celle qui correspond aux dérivées de

l'ordre le plus élevé, il m'a paru au moins curieux, sinon nécessaire, d'examiner comment on pouvait conserver cette forme. C'est ce qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

J'ajouterai seulement ici l'expression des paramètres différentiels du second ordre, qui ont la forme la plus simple possible quand on y laisse subsister les $r_{\alpha\beta}^{(i)}$. L'expression

$$\Delta_2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2},$$

ou

$$\Delta_2 \alpha = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial u}$$

devient tout de suite, en effet, quand on prend α, β, \dots, v pour variables indépendantes,

$$\Delta_2 \alpha = r_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + r_{\beta\alpha}^{(\beta)} + \dots + r_{v\alpha}^{(v)}.$$

**Formules nouvelles concernant les paramètres différentiels.
Introduction des signes d'opération.**

4. Soient toujours $\alpha, \beta, \dots, v, n$ fonctions des n variables indépendantes x, y, z, \dots, u , et

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \dots, \quad \alpha_{11} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \quad \dots$$

Désignons par A, B, C, ..., U les opérations

$$A = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial u}, \quad B = \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \beta_n \frac{\partial}{\partial u}, \quad \dots,$$

de façon que

$$\begin{aligned} A\alpha &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = (\alpha\alpha), \\ A\beta &= B\alpha = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n = (\alpha\beta) \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En posant encore

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & \dots & (\alpha\nu) \\ (\alpha\beta) & (\beta\beta) & \dots & (\beta\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha\nu) & (\beta\nu) & \dots & (\nu\nu) \end{vmatrix} = R$$

et tenant compte des relations ordinaires

$$\begin{aligned} (\alpha\alpha) \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} + (\alpha\beta) \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} + \dots + (\alpha\nu) \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} &= R, \\ (\alpha\alpha) \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} + (\alpha\beta) \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} + \dots + (\alpha\nu) \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\beta\nu)} &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

on voit immédiatement que, pour une fonction quelconque φ des variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$, on a

$$R \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} A \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} B \varphi + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} U \varphi,$$

en observant que

$$A \varphi = (\alpha\alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + (\alpha\beta) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \dots + (\alpha\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu},$$

formules qui servent au passage de la différentiation partielle aux opérations, ou *vice versa*. En changeant dans la première φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, on obtiendrait aisément les expressions d'une dérivée seconde en opérations doubles, ou *vice versa*. Mais je n'insisterai pas sur ce point, qui se rattache spécialement au calcul des opérations, dont les géomètres anglais principalement se sont occupés à un point de vue très-général.

Fonctions auxiliaires.

5. Si l'on fait

$$\gamma_1 B \alpha_1 + \gamma_2 B \alpha_2 + \dots + \gamma_n B \alpha_n = R_{\beta\gamma}^{(\alpha)}$$

ou, pour abrégér,

$$\Sigma \gamma_i B \alpha_i = R_{\beta\gamma}^{(\alpha)},$$

le Σ se rapportant aux indices 1, 2, ..., n, comme cela sera sous-entendu désormais, on a, par le développement immédiat,

$$\Sigma \gamma_i B \alpha_i = \Sigma \beta_i C \alpha_i, \text{ c'est-à-dire } R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = R_{\gamma\beta}^{(\alpha)}.$$

D'autre part, les indices numériques marquant toujours les dérivées partielles par rapport à x, y, \dots , on a

$$(A \beta)_i = A \beta_i + B \alpha_i;$$

d'où résulte

$$\sum \gamma_i A \beta_i + \sum \gamma_i B \alpha_i = \sum \gamma_i (A \beta)_i = CA \beta.$$

Ainsi

$$R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} + R_{\alpha\gamma}^{(\beta)} = C(\alpha\beta), \quad R_{\alpha\gamma}^{(\beta)} + R_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = A(\beta\gamma), \quad R_{\alpha\beta}^{(\gamma)} + R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = B(\alpha\gamma).$$

En joignant à ces équations celles-ci :

$$R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = R_{\gamma\beta}^{(\alpha)}, \quad R_{\alpha\gamma}^{(\beta)} = R_{\gamma\alpha}^{(\beta)}, \quad R_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = R_{\beta\alpha}^{(\gamma)},$$

on en tire

$$(6) \quad R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} [C(\alpha\beta) + B(\alpha\gamma) - A(\beta\gamma)],$$

et en particulier

$$(6') \quad R_{\beta\beta}^{(\alpha)} = B(\alpha\beta) - \frac{1}{2} A(\beta\beta), \quad R_{\alpha\alpha}^{(\beta)} = \frac{1}{2} B(\alpha\alpha), \quad R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} A(\alpha\alpha).$$

On peut donc exprimer sous forme très-simple les $R_{\beta\gamma}^{(\alpha)}$, . . . , par les dérivées premières des $(\alpha\beta)$, ou *vice versa*. Et l'on peut observer la parfaite analogie de l'équation (6) avec les formules (3) du n° 2.

On peut aussi observer, en passant, que si l'on posait

$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \dots = r_{\beta\alpha}^{(x)}, \quad \dots,$$

ce qui s'offrirait naturellement, d'après le n° 1, si l'on voulait prendre x, γ, \dots, u pour les variables indépendantes, on pourrait écrire cette relation sous la forme

$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \dots = r_{\beta\alpha}^{(x)},$$

c'est-à-dire

$$B\alpha_i = r_{\beta\alpha}^{(x)},$$

et il en résulterait

$$R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = \gamma_1 r_{\beta\alpha}^{(x)} + \gamma_2 r_{\beta\alpha}^{(\gamma)} + \dots + \gamma_n r_{\beta\alpha}^{(u)}.$$

Équations linéaires.

6. Considérons les équations de définition

$$\begin{aligned} \alpha_1 A \alpha_1 + \alpha_2 A \alpha_2 + \dots + \alpha_n A \alpha_n &= R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}, \\ \beta_1 A \alpha_1 + \beta_2 A \alpha_2 + \dots + \beta_n A \alpha_n &= R_{\alpha\beta}^{(\alpha)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \nu_1 A \alpha_1 + \nu_2 A \alpha_2 + \dots + \nu_n A \alpha_n &= R_{\alpha\nu}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$, on en tirera des expressions de la forme

$$\begin{aligned} A\alpha_1 &= \alpha_1 \mathfrak{A} + \beta_1 \mathfrak{B} + \dots + \nu_1 \mathfrak{C}, \\ A\alpha_2 &= \alpha_2 \mathfrak{A} + \beta_2 \mathfrak{B} + \dots + \nu_2 \mathfrak{C}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

car on déduira de là

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_i A\alpha_i &= (\alpha\alpha) \mathfrak{A} + (\alpha\beta) \mathfrak{B} + \dots + (\alpha\nu) \mathfrak{C}, \\ \Sigma \beta_i A\alpha_i &= (\alpha\beta) \mathfrak{A} + (\beta\beta) \mathfrak{B} + \dots + (\beta\nu) \mathfrak{C}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En tirant de ces dernières les valeurs de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{C}$, on aura donc

$$(7) \left\{ \begin{aligned} RA\alpha_i &= \left[\frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} R_{\alpha\nu}^{(\alpha)} \right] \alpha_i \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\beta\nu)} R_{\alpha\nu}^{(\alpha)} \right] \beta_i \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\beta\nu)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{\partial R}{\partial(\nu\nu)} R_{\alpha\nu}^{(\alpha)} \right] \nu_i. \end{aligned} \right.$$

On trouverait d'une manière analogue

$$(7') \left\{ \begin{aligned} RB\alpha_i &= \left[\frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R_{\beta\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} R_{\beta\nu}^{(\alpha)} \right] \alpha_i \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \frac{\partial R}{\partial(\beta\beta)} R_{\beta\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\beta\nu)} R_{\beta\nu}^{(\alpha)} \right] \beta_i \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\nu)} R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\beta\nu)} R_{\beta\beta}^{(\alpha)} + \dots + \frac{\partial R}{\partial(\nu\nu)} R_{\beta\nu}^{(\alpha)} \right] \nu_i, \end{aligned} \right.$$

formules où l'on doit écrire successivement $\alpha_2, \beta_2, \dots, \nu_2$; puis $\alpha_3, \beta_3, \dots, \nu_3$; ... au lieu de $\alpha_1, \beta_1, \dots, \nu_1$; et l'on aura d'autres formules pareilles par des transpositions de lettres. Il est facile de voir que l'intégration de ces équations, quand les $R_{\beta\gamma}^{(\alpha)}$ et les $(\alpha\beta)$ sont connus, peut être ramenée à l'intégration successive d'équations que l'on peut traiter comme aux différentielles ordinaires.

Sommets symétriques.

7. En multipliant l'expression précédente de $A\alpha$, par $A\alpha$, et prenant le Σ , on aura

$$R \Sigma A \alpha, A \alpha = \sum_{\alpha_i} \frac{\partial R}{\partial (\varepsilon_i)} R_{\alpha_i}^{(\alpha)} R_{\alpha_i}^{(\alpha)},$$

Σ_{α} se rapportant à toutes les combinaisons avec répétition des lettres $\alpha, \beta, \dots, \nu$.

En multipliant de même par $A\alpha$, les deux membres de l'équation (7'), on en conclura

$$R \Sigma A \alpha, B \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i} \frac{\partial R}{\partial (\varepsilon_i)} (R_{\alpha_i}^{(\alpha)} R_{\beta_i}^{(\alpha)} + R_{\alpha_i}^{(\alpha)} B_{\beta_i}^{(\alpha)}),$$

et l'on trouvera, par le même procédé, la formule générale qui comprend les deux précédentes

$$8) \quad R \Sigma H \alpha, K \beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i} \frac{\partial R}{\partial (\varepsilon_i)} (R_{\eta_i}^{(\alpha)} R_{\alpha_i}^{(\beta)} + R_{\eta_i}^{(\alpha)} R_{\alpha_i}^{(\beta)}),$$

les lettres H et η se correspondant, ainsi que K et α .

On remarquera que quelques-unes de ces sommes symétriques peuvent s'écrire d'une manière un peu différente, en ayant égard aux relations

$$A \alpha = \frac{1}{2} (\alpha \alpha)_1, \quad B \alpha + A \beta = (\alpha \beta)_1, \quad \dots$$

En multipliant ces relations deux à deux, on en conclut effectivement

$$4 \Sigma A \alpha, A \alpha = \left[\frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial y} \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial u} \right]^2,$$

$$4 \Sigma A \alpha, B \beta = \frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial x} \frac{\partial (\beta \beta)}{\partial x} + \dots + \frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial u} \frac{\partial (\beta \beta)}{\partial u},$$

$$2 \Sigma A \alpha, B \alpha + 2 \Sigma A \alpha, A \beta = \frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial x} \frac{\partial (\alpha \beta)}{\partial x} + \dots + \frac{\partial (\alpha \alpha)}{\partial u} \frac{\partial (\alpha \beta)}{\partial u},$$

$$\Sigma (B \alpha)_1^2 + \Sigma (A \beta)_1^2 + 2 \Sigma A \beta, B \alpha = \left[\frac{\partial (\alpha \beta)}{\partial x} \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial (\alpha \beta)}{\partial u} \right]^2,$$

.....

Relations différentielles entre les fonctions auxiliaires.

8. Soit f une fonction quelconque des variables x, y, \dots, u . On a

$$\begin{aligned} \Lambda f &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n, \\ Bf &= \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n; \end{aligned}$$

d'où

$$BAf - ABf = (B\alpha_1 - A\beta_1)f_1 + \dots + (B\alpha_n - A\beta_n)f_n.$$

En changeant successivement, dans cette dernière relation, f en f_1, f_2, \dots, f_n , on en déduit

$$\Sigma \alpha_i (BAf_i - ABf_i) = (B\alpha_1 - A\beta_1) \Lambda f_1 + \dots + (B\alpha_n - A\beta_n) \Lambda f_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_i (BAf_i - ABf_i) &= \Sigma (B\alpha_i - A\beta_i) \Lambda f_i, \\ \Sigma \beta_i (BAf_i - ABf_i) &= \Sigma (B\alpha_i - A\beta_i) Bf_i, \\ \Sigma \gamma_i (BAf_i - ABf_i) &= \Sigma (B\alpha_i - A\beta_i) Cf_i, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si l'on observe que, par exemple, on a

$$\alpha_i BAf_i = B(\alpha_i \Lambda f_i) - B\alpha_i \Lambda f_i,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} B\Sigma \alpha_i \Lambda f_i - \Lambda \Sigma \alpha_i Bf_i &= 2\Sigma B\alpha_i \Lambda f_i - \Sigma A\alpha_i Bf_i - \Sigma A\beta_i \Lambda f_i, \\ B\Sigma \beta_i \Lambda f_i - \Lambda \Sigma \beta_i Bf_i &= \Sigma B\beta_i \Lambda f_i + \Sigma B\alpha_i Bf_i - 2\Sigma A\beta_i Bf_i, \\ B\Sigma \gamma_i \Lambda f_i - \Lambda \Sigma \gamma_i Bf_i &= \Sigma B\alpha_i Cf_i - \Sigma A\beta_i Cf_i + \Sigma B\gamma_i \Lambda f_i - \Sigma A\gamma_i Bf_i, \\ &\dots \end{aligned}$$

Lorsque f désigne l'une quelconque des variables α, β, \dots, x , on a donc

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} BR_{\alpha\alpha}^{(x)} - AR_{\alpha\beta}^{(x)} &= 2\Sigma B\alpha_i A\alpha_i - \Sigma A\alpha_i B\alpha_i - \Sigma A\beta_i A\alpha_i, \\ BR_{\alpha\beta}^{(x)} - AR_{\beta\beta}^{(x)} &= \Sigma B\beta_i A\alpha_i + \Sigma B\alpha_i B\alpha_i - 2\Sigma A\beta_i B\alpha_i, \\ BR_{\alpha\gamma}^{(x)} - AR_{\beta\gamma}^{(x)} &= \Sigma B\alpha_i C\alpha_i - \Sigma A\beta_i C\alpha_i + \Sigma B\gamma_i A\alpha_i - \Sigma A\gamma_i B\alpha_i, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

En ayant égard à la formule (8), on pourra écrire la troisième de 53.

ces équations sous la forme

$$(10) \left\{ \begin{aligned} R(BR_{\alpha\gamma}^{(x)} - AR_{\beta\gamma}^{(x)}) &= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon\iota} \frac{\partial R}{\partial(\epsilon\iota)} (R_{\beta\epsilon}^{(\alpha)} R_{\gamma\iota}^{(x)} + R_{\beta\iota}^{(\alpha)} R_{\gamma\epsilon}^{(x)} - R_{\alpha\epsilon}^{(\beta)} R_{\gamma\iota}^{(x)} - R_{\alpha\iota}^{(\beta)} R_{\gamma\epsilon}^{(x)} \\ &\quad + R_{\beta\epsilon}^{(\gamma)} R_{\alpha\iota}^{(x)} + R_{\beta\iota}^{(\gamma)} R_{\alpha\epsilon}^{(x)} - R_{\alpha\epsilon}^{(\gamma)} R_{\beta\iota}^{(x)} - R_{\alpha\iota}^{(\gamma)} R_{\beta\epsilon}^{(x)}). \end{aligned} \right.$$

On peut, dans cette formule, faire coïncider γ avec α ou β et x avec une quelconque de ces lettres.

Conditions d'intégrabilité des équations linéaires du n° 6.

9. Les relations (9) ou (10) expriment précisément les conditions de la coexistence des n systèmes d'équations simultanées

$$\begin{aligned} A\alpha_1 &= \alpha_1 \mathfrak{A} + \beta_1 \mathfrak{B} + \dots + \nu_1 \mathfrak{V}, \\ B\alpha_1 &= \alpha_1 \mathfrak{A}' + \beta_1 \mathfrak{B}' + \dots + \nu_1 \mathfrak{V}', \\ &\dots\dots\dots, \\ U\alpha_1 &= \alpha_1 \mathfrak{A}^{(n-1)} + \beta_1 \mathfrak{B}^{(n-1)} + \dots + \nu_1 \mathfrak{V}^{(n-1)}, \\ \\ A\alpha_2 &= \alpha_2 \mathfrak{A} + \beta_2 \mathfrak{B} + \dots + \nu_2 \mathfrak{V}, \\ B\alpha_2 &= \alpha_2 \mathfrak{A}' + \beta_2 \mathfrak{B}' + \dots + \nu_2 \mathfrak{V}', \\ &\dots\dots\dots, \\ U\alpha_2 &= \alpha_2 \mathfrak{A}^{(n-1)} + \beta_2 \mathfrak{B}^{(n-1)} + \dots + \nu_2 \mathfrak{V}^{(n-1)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \\ A\alpha_n &= \alpha_n \mathfrak{A} + \dots + \nu_n \mathfrak{V}, \\ B\alpha_n &= \alpha_n \mathfrak{A}' + \dots + \nu_n \mathfrak{V}', \\ &\dots\dots\dots, \\ U\alpha_n &= \alpha_n \mathfrak{A}^{(n-1)} + \dots + \nu_n \mathfrak{V}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

où les quantités $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{V}$, censées connues, ont les valeurs trouvées au n° 6, et de même les expressions analogues $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \dots, \mathfrak{A}^{(n-1)}, \dots$. On tire, en effet, des équations proposées, pour les conditions en question, des relations telles que

$$\begin{aligned} BA\alpha_1 - AB\alpha_1 &= (\alpha_1 B\mathfrak{A} + \dots + \nu_1 B\mathfrak{V}) - (\alpha_1 A\mathfrak{A}' + \dots + \nu_1 A\mathfrak{V}') \\ &\quad + (\mathfrak{A} B\alpha_1 + \dots + \mathfrak{V} B\nu_1) - (\mathfrak{A}' A\alpha_1 + \dots + \mathfrak{V}' A\nu_1). \end{aligned}$$

Les n équations obtenues en mettant successivement dans cette der-

nière, à la place de l'indice 1, les indices 1, 2, ..., n, peuvent être remplacées par les n équations provenant de la combinaison

$$\Sigma \rho_i (BA \alpha_i - AB \alpha_i),$$

dans laquelle ρ désigne successivement les n variables $\alpha, \beta, \dots, \nu$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma \rho_i (BA \alpha_i - AB \alpha_i) = & (\alpha \rho) B \mathfrak{A} + \dots + (\nu \rho) B \mathfrak{V} - [(\alpha \rho) A \mathfrak{A}' + \dots + (\nu \rho) A \mathfrak{V}'] \\ & + \mathfrak{A} \Sigma \rho_i B \alpha_i + \dots + \mathfrak{V} \Sigma \rho_i B \nu_i - (\mathfrak{A}' \Sigma \rho_i A \alpha_i + \dots + \mathfrak{V}' \Sigma \rho_i A \nu_i). \end{aligned}$$

Or de la relation (n° 6)

$$R_{\alpha \rho}^{\alpha} = (\alpha \rho) \mathfrak{A} + (\beta \rho) \mathfrak{B} + \dots + (\nu \rho) \mathfrak{V}$$

résulte

$$BR_{\alpha \rho}^{\alpha} = (\alpha \rho) B \mathfrak{A} + \dots + (\nu \rho) B \mathfrak{V} + \mathfrak{A} B(\alpha \rho) + \dots + \mathfrak{V} B(\nu \rho);$$

de sorte que le second membre de l'équation précédente, en ne faisant attention qu'aux termes qui introduisent des dérivées secondes de $(\alpha \alpha)$, $(\alpha \beta)$, ..., contient seulement en fait de pareils termes $BR_{\alpha \rho}^{\alpha} - AR_{\rho \rho}^{\alpha}$: ce qui est précisément la partie qu'introduit au premier membre l'expression $\Sigma \rho_i (BA \alpha_i - AB \alpha_i)$, d'après le numéro précédent. On démontrerait aisément que les parties du *premier ordre* sont aussi les mêmes dans les deux membres : de façon que les conditions d'intégrabilité, qu'on trouverait par le procédé habituel, qu'on vient d'employer, deviennent identiques quand on tient compte des relations (9) ou (10), qui peuvent dès lors les remplacer.

Remarques sur ces conditions.

10. Lorsque, dans les formules (9) ou (10), on substitue les expressions (7) des $R_{\rho \tau}^{\alpha}$, les équations ainsi obtenues ne sont pas toutes distinctes. Ainsi, pour $\alpha = \alpha$, la première devient

$$\frac{1}{2} BA(\alpha \alpha) - \frac{1}{2} AB(\alpha \alpha) = \Sigma B \alpha_i A \alpha_i - \Sigma A \alpha_i A \beta_i,$$

équation où n'entrent en réalité que des dérivées premières $\frac{\partial(\alpha \beta)}{\partial \alpha}$, ..., et qui doit être identique entre ces dérivées. C'est ce que l'on vérifie, en observant qu'on peut l'écrire

$$\frac{1}{2} BA(\alpha \alpha) - \frac{1}{2} AB(\alpha \alpha) = \Sigma \frac{1}{2} (\alpha \alpha)_i (B \alpha_i - A \beta_i).$$

Or, en supposant $f = (\alpha\alpha)$ dans la troisième équation du commencement du n° 8, l'équation précédente devient manifestement identique.

Pour $x = \beta$, la première équation (9) devient

$$BA(\alpha\beta) - \frac{1}{2}AA(\beta\beta) - \frac{1}{2}BB(\alpha\alpha) = 2\Sigma B\alpha_1 A\beta_1 - \Sigma A\alpha_1 B\beta_1 - \Sigma A\beta_1 A\beta_1;$$

et, comme on aurait aussi

$$AB(\alpha\beta) - \frac{1}{2}AA(\beta\beta) - \frac{1}{2}BB(\alpha\alpha) = 2\Sigma A\beta_1 B\alpha_1 - \Sigma B\alpha_1 A\alpha_1 - \Sigma B\alpha_1 B\alpha_1,$$

il en résulte

$$BA(\alpha\beta) - AB(\alpha\beta) = \Sigma B\alpha_1 B\alpha_1 - \Sigma A\beta_1 A\beta_1.$$

Le premier membre est du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}$, ...; il en est de même du second, et l'équation est identique.

On peut le vérifier en observant que le second membre revient à

$$\Sigma(B\alpha_1 + A\beta_1)(B\alpha_1 - A\beta_1) \quad \text{ou} \quad \Sigma(B\alpha_1 - A\beta_1)(\alpha\beta)_1,$$

c'est-à-dire en supposant $f = (\alpha\beta)$, dans la formule rappelée du n° 8.

$$BA(\alpha\beta) - AB(\alpha\beta).$$

Cette équation, où n'entrent que des dérivées premières $\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial x}$, ..., peut servir, si l'on veut, à de certaines transformations ou à un calcul particulier des sommes $\Sigma B\alpha_1 B\alpha_1$, ...

Les deux équations ci-dessus rentrant l'une dans l'autre, on peut leur substituer, pour plus de symétrie, l'équation unique provenant de leur somme, savoir :

$$\begin{aligned} & BA(\alpha\beta) + AB(\alpha\beta) - AA(\beta\beta) - BB(\alpha\alpha) \\ & = 4\Sigma B\alpha_1 A\beta_1 - 2\Sigma A\alpha_1 B\beta_1 - \Sigma A\beta_1 A\beta_1 - \Sigma B\alpha_1 B\alpha_1, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & BA(\alpha\beta) + AB(\alpha\beta) - AA(\beta\beta) - BB(\alpha\alpha) \\ & = 6\Sigma B\alpha_1 A\beta_1 - \Sigma(\alpha\beta)_1(\alpha\beta)_1 - \frac{1}{2}\Sigma(\alpha\alpha)_1(\beta\beta)_1, \end{aligned}$$

en tenant compte de la remarque de la fin du n° 7.

Pour $x = \gamma$, la première équation (9) donne

$$\begin{aligned} & BA(\alpha\gamma) - \frac{1}{2}BC(\alpha\alpha) - \frac{1}{2}A[A(\beta\gamma) + B(\alpha\gamma) - C(\alpha\beta)] \\ & = 2\Sigma B\alpha_1 A\gamma_1 - \Sigma A\alpha_1 B\gamma_1 - \Sigma A\beta_1 A\gamma_1; \end{aligned}$$

et l'on a des expressions analogues pour $\alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots$. Si l'on pose généralement

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial u^2},$$

on aura, d'après ces équations,

$$\sqrt{R} \Delta_1 \alpha = \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \alpha_1} A \alpha_1 + \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \beta_1} B \alpha_1 + \dots + \sum \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \nu_1} U \alpha_1,$$

le Σ étant toujours relatif aux indices. En mettant, dans cette équation, les expressions (7), (7') de $A \alpha_1, B \alpha_1$, et les analogues, on en conclura immédiatement

$$(11) \quad R \Delta_1 \alpha = \sum_{ii} \frac{\partial R}{\partial (\epsilon_i)} R_{ii}^{(\epsilon)},$$

le Σ_{ii} se rapportant à toutes les combinaisons deux à deux, avec répétition, des n lettres $\alpha, \beta, \dots, \nu$.

On observera, en passant, que, en ayant égard aux relations telles que

$$\sqrt{R} \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial R}{\partial (\alpha\alpha)} \alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial (\alpha\beta)} \beta_1 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial (\alpha\nu)} \nu_1,$$

les expressions ci-dessus de $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$ peuvent être rendues linéaires relativement à α_1, β_1, \dots .

Paramètres différentiels du second ordre des paramètres du premier ordre.

12. D'après une propriété connue des déterminants, on tire des expressions ci-dessus de $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$

$$R(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \dots + \alpha_{1n}^2) = \frac{\partial R}{\partial (\alpha\alpha)} (A \alpha_1)^2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial (\nu\nu)} (U \alpha_1)^2 + \frac{\partial R}{\partial (\alpha\beta)} A \alpha_1 B \alpha_1 + \dots;$$

d'ailleurs, de

$$A \alpha_1 = \frac{1}{2} (\alpha\alpha)_1,$$

on tire, par la différentiation immédiate,

$$A \alpha_{11} + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \dots + \alpha_{1n}^2 = \frac{1}{2} (\alpha\alpha)_{11}.$$

Cela, rapproché de l'équation précédente, fournit tout de suite

$$(12) \quad R[\frac{1}{2}\Delta_2(\alpha\alpha) - A\Delta_2\alpha] = \sum_{ii} \left[\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon i)} \Sigma E\alpha_i I\alpha_i \right],$$

le Σ_{ii} affectant toujours les lettres $\alpha, \beta, \dots, \nu$ et en même temps les opérations correspondantes A, B, \dots, U .

Des mêmes expressions déjà invoquées de $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$, et des expressions analogues de $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots$, on tire aussi

$$\begin{aligned} & R(\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{1n}) \\ &= \frac{\partial R}{\partial(\alpha\alpha)} A\alpha \cdot A\beta + \dots + \frac{\partial R}{\partial(\nu\nu)} U\alpha \cdot U\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\alpha\beta)} (A\alpha \cdot B\beta + A\beta \cdot B\alpha) + \dots; \end{aligned}$$

d'ailleurs, à cause de

$$B\alpha + A\beta = (\alpha\beta)_{11},$$

on a

$$B\alpha_{11} + A\beta_{11} + 2(\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{1n}) = (\alpha\beta)_{11}.$$

On conclut de là

$$(13) \quad R[\Delta_2(\alpha\beta) - B\Delta_2\alpha - A\Delta_2\beta] = \sum_{ii} \left[\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon i)} \Sigma (E\alpha_i I\beta_i + E\beta_i I\alpha_i) \right],$$

formule qui redonne la précédente en faisant coïncider α et β , et, en même temps, les opérations correspondantes A et B .

On peut présenter sous une autre forme les équations (12) et (13). Je m'occuperai seulement de la seconde, la première pouvant être considérée comme un cas particulier de celle-ci.

En ayant égard à l'équation (8), l'équation (13) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & R^2[\Delta_2(\alpha\beta) - B\Delta_2\alpha - A\Delta_2\beta] \\ &= 2 \sum_{i\eta\kappa} \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\varepsilon i)} \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial(\eta\kappa)} (R_{i\eta}^{(\alpha)} R_{i\kappa}^{(\beta)} + R_{i\kappa}^{(\alpha)} R_{i\eta}^{(\beta)} + R_{i\kappa}^{(\alpha)} R_{i\eta}^{(\beta)} + R_{i\eta}^{(\alpha)} R_{i\kappa}^{(\beta)}). \end{aligned}$$

Si l'on représente, pour un moment, par α_{ii} le déterminant mineur, pris avec un signe convenable, que l'on obtient en effaçant dans R la ligne et la colonne qui se croisent à l'un des éléments (εi) ou $(i\varepsilon)$ (déterminant qui peut ainsi être obtenu de deux manières si ε et i sont différents), il est clair que le second membre de l'équation précédente revient à

$$2 \sum_{i\eta\kappa} \alpha_{ii} \alpha_{\eta\kappa} R_{i\eta}^{(\alpha)} R_{i\kappa}^{(\beta)},$$

pourvu que $\varepsilon, i, \eta, \kappa$ désignent séparément et successivement chacune

des n lettres $\alpha, \beta, \dots, \nu$, dans cette somme quadruple, sous la condition

$$a_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}, \quad a_{\gamma\kappa} = a_{\kappa\gamma}.$$

Sous ces mêmes conventions, on peut écrire, d'après l'équation (11),

$$R^2 \Delta_2 \alpha \Delta_2 \beta = \sum_{\epsilon, \eta, \kappa} a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)}.$$

D'après cela, on aura

$$\frac{1}{2} R^2 [\Delta_2(\alpha\beta) - A \Delta_2 \beta - B \Delta_2 \alpha - 2 \Delta_2 \alpha \Delta_2 \beta] = \sum_{\epsilon, \eta, \kappa} (a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} - a_{\epsilon\kappa} a_{\eta\epsilon}) R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)}.$$

Si l'on échange ϵ et κ , et en même temps η et ϵ , l'expression $(a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} - a_{\epsilon\kappa} a_{\eta\epsilon})$ reste la même, en sorte que l'on a toujours au second membre

$$(a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} - a_{\epsilon\kappa} a_{\eta\epsilon}) (R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)} + R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\beta)});$$

mais, en échangeant ϵ et κ , la même expression change de signe, de façon qu'il s'introduit au second membre

$$(a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} - a_{\epsilon\kappa} a_{\eta\epsilon}) (R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)} + R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\beta)} - R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\beta)} - R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)}).$$

Enfin $(a_{\epsilon\eta} a_{\kappa\epsilon} - a_{\epsilon\kappa} a_{\eta\epsilon})$ est égale, suivant les cas, à $R \frac{\partial^2 R}{\partial(\epsilon\eta) \partial(\kappa\epsilon)}$ ou à la moitié de cette quantité, à cause que R est un déterminant symétrique. En ayant égard à l'étendue que doivent parcourir les lettres ϵ, η, κ , on voit aisément que l'on peut prendre dans tous les cas

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} R [\Delta_2(\alpha\beta) - A \Delta_2 \beta - B \Delta_2 \alpha - 2 \Delta_2 \alpha \Delta_2 \beta] \\ = \sum \frac{\partial^2 R}{\partial(\epsilon\eta) \partial(\kappa\epsilon)} (R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)} + R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\beta)} - R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\beta)} - R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\beta)}). \end{array} \right.$$

le second membre comprenant toutes les dérivées secondes distinctes, sous la condition qu'ayant pris le terme répondant à $\frac{\partial^2 R}{\partial(\epsilon\eta) \partial(\kappa\epsilon)}$, par exemple, il faut alors exclure ce qui proviendrait de $\frac{\partial^2 R}{\partial(\kappa\epsilon) \partial(\epsilon\eta)}$ et de $\frac{\partial^2 R}{\partial(\epsilon\eta) \partial(\kappa\epsilon)}$.

En faisant coïncider α et β , on aura

$$(12') \quad \frac{1}{2} R [\frac{1}{2} \Delta_2(\alpha\alpha) - A \Delta_2 \alpha - \Delta_2 \alpha^2] = \sum \frac{\partial^2 R}{\partial(\epsilon\eta) \partial(\kappa\epsilon)} (R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)} R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} - R_{\kappa\epsilon}^{(\alpha)} R_{\epsilon\eta}^{(\alpha)}).$$

Développement des principales formules pour le cas des trois fonctions.

13. Comme, pour l'application aux lignes isothermes, il sera nécessaire d'avoir sous les yeux les formules développées, je vais écrire ici les plus essentielles de ces formules, pour le cas de trois fonctions α, β, γ des variables indépendantes x, y, z .

Pour simplifier autant que possible l'écriture, je poserai

$$\begin{aligned} (\alpha\alpha) &= \frac{\partial\alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\alpha^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\alpha^2}{\partial z^2} = l, \\ (\beta\beta) &= \frac{\partial\beta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\beta^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\beta^2}{\partial z^2} = m, \\ (\gamma\gamma) &= \frac{\partial\gamma^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\gamma^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\gamma^2}{\partial z^2} = n, \\ (\beta\gamma) &= \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \lambda, \\ (\gamma\alpha) &= \frac{\partial\gamma}{\partial x} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{\partial\alpha}{\partial z} = \mu, \\ (\alpha\beta) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \frac{\partial\beta}{\partial z} = \nu. \end{aligned}$$

Je ferai, pour la même raison,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} &= p_{11}, & R_{\beta\beta}^{(\alpha)} &= p_{22}, & R_{\gamma\gamma}^{(\alpha)} &= p_{33}, & R_{\alpha\beta}^{(\alpha)} &= p_{12}, & R_{\alpha\gamma}^{(\alpha)} &= p_{13}, & R_{\beta\gamma}^{(\alpha)} &= p_{23}, \\ R_{\alpha\alpha}^{(\beta)} &= q_{11}, & R_{\beta\beta}^{(\beta)} &= q_{22}, & R_{\gamma\gamma}^{(\beta)} &= q_{33}, & R_{\alpha\beta}^{(\beta)} &= q_{12}, & R_{\alpha\gamma}^{(\beta)} &= q_{13}, & R_{\beta\gamma}^{(\beta)} &= q_{23}, \\ R_{\alpha\alpha}^{(\gamma)} &= r_{11}, & R_{\beta\beta}^{(\gamma)} &= r_{22}, & R_{\gamma\gamma}^{(\gamma)} &= r_{33}, & R_{\alpha\beta}^{(\gamma)} &= r_{12}, & R_{\alpha\gamma}^{(\gamma)} &= r_{13}, & R_{\beta\gamma}^{(\gamma)} &= r_{23}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, dans les $R_{\beta\gamma}^{(\alpha)}$, l'indice supérieur α correspond à la lettre p, β à q, γ à r , et les indices inférieurs aux mêmes lettres α, β, γ , suivant leur rang alphabétique.

Moyennant cette notation, on aura

$$\begin{aligned} (a) \left\{ \begin{array}{lll} p_{11} = \frac{1}{2}Al, & q_{12} = \frac{1}{2}Am, & r_{13} = \frac{1}{2}An, \\ p_{12} = \frac{1}{2}Bl, & q_{22} = \frac{1}{2}Bm, & r_{23} = \frac{1}{2}Bn, \\ p_{13} = \frac{1}{2}Cl; & q_{13} = \frac{1}{2}Cm; & r_{33} = \frac{1}{2}Cn; \end{array} \right. \\ (b) \left\{ \begin{array}{lll} p_{22} = B\nu - \frac{1}{2}Am, & q_{11} = A\nu - \frac{1}{2}Bl, & r_{11} = A\mu - \frac{1}{2}Cl, \\ p_{33} = C\mu - \frac{1}{2}An, & q_{23} = C\lambda - \frac{1}{2}Bn, & r_{21} = B\lambda - \frac{1}{2}Cm, \\ p_{23} = \frac{1}{2}(B\mu + C\nu - A\lambda), & q_{13} = \frac{1}{2}(A\lambda + C\nu - B\mu), & r_{12} = \frac{1}{2}(A\lambda + B\mu - C\nu), \end{array} \right. \end{aligned}$$

ce dernier groupe pouvant être remplacé par

$$(b') \quad \begin{cases} A\lambda = q_{12} + r_{12}, & A'\mu = r_{11} + p_{12}, & A\nu = p_{12} + q_{11}, \\ B\lambda = q_{23} + r_{23}, & B\mu = r_{12} + p_{23}, & B\nu = p_{23} + q_{12}, \\ C\lambda = q_{31} + r_{31}, & C\mu = r_{13} + p_{31}, & C\nu = p_{31} + q_{13}. \end{cases}$$

On a ici

$$R = lmn - l\lambda^2 - m\mu^2 - n\nu^2 + 2\lambda\mu\nu,$$

et les équations (11), (12'), (13') deviennent

$$(c) \quad \begin{cases} R\Delta_2\alpha = (mn - \lambda^2)p_{11} + 2(\mu\nu - l\lambda)p_{22} \\ \quad + (ln - \mu^2)p_{22} + 2(\lambda\nu - m\mu)p_{13} \\ \quad + (lm - \nu^2)p_{33} + 2(\lambda\mu - n\nu)p_{12}; \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}R(\frac{1}{2}\Delta_2l - A\Delta_2\alpha - \Delta_2\alpha^2) = l(p_{23}^2 - p_{23}p_{33}) + 2\lambda(p_{11}p_{23} - p_{12}p_{13}) \\ \quad + m(p_{13}^2 - p_{11}p_{33}) + 2\mu(p_{22}p_{13} - p_{12}p_{23}) \\ \quad + n(p_{12}^2 - p_{11}p_{22}) + 2\nu(p_{23}p_{12} - p_{13}p_{23}); \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}R(\Delta_2\nu - A\Delta_2\beta - B\Delta_2\alpha - 2\Delta_2\alpha\Delta_2\beta) \\ = l(2p_{23}q_{23} - p_{23}q_{33} - p_{33}q_{23}) + 2\lambda(p_{11}q_{23} + p_{23}q_{11} - p_{12}q_{13} - p_{13}q_{12}) \\ \quad + m(2p_{13}q_{13} - p_{11}q_{23} - p_{33}q_{11}) + 2\mu(p_{22}q_{13} + p_{13}q_{22} - p_{12}q_{23} - p_{23}q_{12}) \\ \quad + n(2p_{12}q_{12} - p_{11}q_{22} - p_{22}q_{11}) + 2\nu(p_{23}q_{12} + p_{12}q_{23} - p_{23}q_{13} - p_{13}q_{23}). \end{cases}$$

L'équation (10) donne les six équations du groupe (f), réductibles à trois en se conformant aux remarques du n° 10. Je n'ai écrit que la première, les autres s'en déduisant par des transpositions de lettres, telles que l'échange de α et β , par exemple, entraîne ceux de l et m , λ et μ , p et q , et des indices 1 et 2. J'indique par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ cette substitution simultanée :

$$(f) \quad \begin{cases} R(Bp_{13} - Ap_{23}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}BCl - \frac{1}{2}A(B\mu + C\nu - A\lambda)] \\ = (mn - \lambda^2)(p_{12}p_{13} - p_{13}q_{11} + p_{11}r_{12} - p_{12}r_{11}) \\ \quad + (ln - \mu^2)(p_{22}p_{23} - p_{23}q_{12} + p_{12}r_{22} - p_{22}r_{12}) \\ \quad + (lm - \nu^2)(p_{23}p_{33} - p_{23}q_{13} + p_{13}r_{23} - p_{23}r_{13}) \\ \quad + (\mu\nu - l\lambda)(p_{22}p_{33} + p_{23}^2 - p_{23}q_{12} - p_{23}q_{13} + p_{13}r_{22} + p_{12}r_{23} - p_{22}r_{13} - p_{23}r_{12}) \\ \quad + (\lambda\nu - m\mu)(p_{12}p_{33} + p_{23}p_{13} - p_{23}q_{11} - p_{13}q_{12} + p_{13}r_{12} + p_{11}r_{23} - p_{12}r_{13} - p_{23}r_{11}) \\ \quad + (\lambda\mu - n\nu)(p_{12}p_{23} + p_{23}p_{13} - p_{23}q_{11} - p_{13}q_{12} + p_{11}r_{22} - p_{23}r_{11}); \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (f') & \left\{ \begin{array}{l} R(Cp_{12} - Ap_{22}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}CB l - \frac{1}{2}A(B\mu + C\nu - A\lambda)] \\ = \binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{array} \right. \\
 (f_1) & \left\{ \begin{array}{l} R(Aq_{22} - Bq_{12}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}ACm - \frac{1}{2}B(A\lambda + C\nu - B\mu)] \\ = \binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{array} \right. \\
 (f'_1) & \left\{ \begin{array}{l} R(Cq_{12} - Bq_{12}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}CAm - \frac{1}{2}B(A\lambda + C\nu - B\mu)] \\ = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f_1), \end{array} \right. \\
 (f_2) & \left\{ \begin{array}{l} R(Br_{12} - Cr_{12}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}BA n - \frac{1}{2}C(A\lambda + B\mu - C\nu)] \\ = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (f), \end{array} \right. \\
 (f'_2) & \left\{ \begin{array}{l} R(Ar_{22} - Cr_{12}) \text{ ou } R[\frac{1}{2}AB n - \frac{1}{2}C(A\lambda + B\mu - C\nu)] \\ = \binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (f'_2). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Comme on peut déduire ces équations de l'une quelconque d'entre elles, il en résulte certains moyens de vérification.

La même équation (10) donne enfin cet autre groupe d'équations, réductibles à trois,

$$\begin{aligned}
 (g) & \left\{ \begin{array}{l} R(Ap_{22} - Bp_{12}) \text{ ou } R(AB\nu - \frac{1}{2}AA m - \frac{1}{2}BB l) \\ = (mn - \lambda^2)(2p_{12}q_{11} - p_{12}^2 - p_{11}q_{12}) \\ + (ln - \mu^2)(2p_{22}q_{12} - p_{22}^2 - p_{12}q_{22}) \\ + (lm - \nu^2)(2p_{22}q_{12} - p_{22}^2 - p_{12}q_{22}) \\ + (\mu\nu - l\lambda)(2p_{22}q_{12} + 2p_{22}q_{12} - 2p_{22}p_{22} - p_{12}q_{22} - p_{12}q_{22}) \\ + (\lambda\nu - m\mu)(2p_{12}q_{12} + 2p_{22}q_{11} - 2p_{12}p_{22} - p_{11}q_{22} - p_{12}q_{12}) \\ + (\lambda\mu - n\nu)(2p_{22}q_{11} + p_{12}q_{12} - 2p_{12}p_{22} - p_{11}q_{22}), \end{array} \right. \\
 (g') & \left\{ \begin{array}{l} R(Bq_{11} - Aq_{12}) \text{ ou } R(BA\nu - \frac{1}{2}AA m - \frac{1}{2}BB l) \\ = \binom{\alpha}{\beta} \text{ effectuée sur le second membre de } (g), \end{array} \right. \\
 (g_1) & \left\{ \begin{array}{l} R(Ap_{22} - Cp_{12}) \text{ ou } R(AC\mu - \frac{1}{2}AA n - \frac{1}{2}CC l) \\ = \binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g), \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$(g'_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(Cr_{11} - Ar_{11}) \text{ ou } R(CA\mu - \frac{1}{2}AA\eta - \frac{1}{2}CCl) \\ = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g_1), \end{array} \right.$$

$$(g'_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(Bq_{22} - Cq_{22}) \text{ ou } R(BC\lambda - \frac{1}{2}CCm - \frac{1}{2}BB\eta) \\ = \binom{\alpha}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g_2), \end{array} \right.$$

$$(g'_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(Cr_{22} - Br_{22}) \text{ ou } R(CB\lambda - \frac{1}{2}CCm - \frac{1}{2}BB\eta) \\ = \binom{\beta}{\gamma} \text{ effectuée sur le second membre de } (g_2). \end{array} \right.$$

Il importe de remarquer que les six équations (d) , (e) peuvent remplacer les six équations (f) , (f_1) , (f_2) , (g) , (g_1) , (g_2) , c'est-à-dire expriment, sous une forme nouvelle, les *conditions d'intégrabilité*, pourvu que dans les trois équations (c) et dans les six (d) , (e) on introduise les expressions (a) et (b) des p , q , r , ou qu'on tienne compte de toute autre manière de ces dernières relations. On peut se convaincre de ce fait en faisant attention aux dérivées secondes de l , m , n , λ , μ , ν , qui s'introduisent aux premiers membres de ces deux systèmes d'équations.

Rayons principaux de courbure.

14. On a donné des formes assez variées à l'équation qui détermine les rayons principaux de courbure d'une surface. On n'a pas, que je sache, signalé la suivante.

Soit $-\omega$ l'inverse de l'un quelconque des rayons principaux de courbure de la surface

$$f(x, y, z) = \alpha = \text{const.},$$

rapportée à des axes rectangulaires. En désignant par ξ , η , ζ les cosinus de direction de la normale, on a les équations ordinaires pour les lignes de courbure

$$(\omega + \xi_1) dx + \xi_1 dy + \xi_1 dz = 0,$$

$$\eta_1 dx + (\omega + \eta_1) dy + \eta_1 dz = 0,$$

$$\zeta_1 dx + \zeta_1 dy + (\omega + \zeta_1) dz = 0;$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \omega + \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \omega + \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \omega + \zeta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

les indices marquant les dérivées partielles par rapport à x, y, z .

A cause de

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

le déterminant fonctionnel $\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 \zeta_3$ est identiquement nul, et l'équation précédente revient à

$$\omega + (\xi_1 + \eta_2 + \zeta_3)\omega + \xi_1 \eta_2 + \xi_1 \zeta_3 + \eta_2 \zeta_3 - \xi_2 \eta_1 - \xi_3 \zeta_1 - \eta_3 \zeta_2 = 0.$$

En faisant toujours

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = l,$$

de sorte que

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{l}}, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{\sqrt{l}}, \quad \zeta = \frac{\alpha_3}{\sqrt{l}},$$

et, par suite,

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{l}} - \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)_1 \alpha_1, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{l}} - \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)_2 \alpha_1, \quad \dots,$$

les deux premiers termes de l'équation en ω deviennent

$$\omega^2 + \left[\frac{\Delta_2 \alpha}{\sqrt{l}} - A \left(\frac{1}{\sqrt{l}} \right) \right] \omega,$$

où, bien entendu,

$$A = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Le terme indépendant de ω , dans la même équation, peut ensuite s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) \\ & + \frac{\alpha_{11}}{2l^2} (\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3) + \frac{\alpha_{22}}{2l^2} (\alpha_1 l_1 + \alpha_3 l_3) + \frac{\alpha_{33}}{2l^2} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \\ & - \frac{\alpha_{23}}{2l^2} (\alpha_2 l_3 + \alpha_3 l_2) - \frac{\alpha_{13}}{2l^2} (\alpha_1 l_3 + \alpha_3 l_1) - \frac{\alpha_{12}}{2l^2} (\alpha_1 l_2 + \alpha_2 l_1). \end{aligned}$$

En ajoutant, dans la seconde ligne, un terme à chaque parenthèse,

α, l , pour la première, etc., cela, abstraction faite de la première ligne, revient à

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_1 \alpha}{2l^2} \Lambda l - \frac{l_1}{2l^2} (\alpha_1 \alpha_{11} + \alpha_2 \alpha_{12} + \alpha_3 \alpha_{13}) \\ - \frac{l_2}{2l^2} (\alpha_1 \alpha_{21} + \alpha_2 \alpha_{22} + \alpha_3 \alpha_{23}) \\ - \frac{l_3}{2l^2} (\alpha_1 \alpha_{31} + \alpha_2 \alpha_{32} + \alpha_3 \alpha_{33}). \end{aligned}$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\Delta_1 \alpha}{2l^2} \Lambda l - \frac{1}{4l^2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2).$$

Quant à la partie, mise de côté tout à l'heure, elle peut s'écrire

$$\frac{1}{2l} [\Delta_1 \alpha^2 - (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{13}^2 + 2\alpha_{23}^2)].$$

Mais de

$$\Lambda \alpha_1 = \frac{1}{2} l_1,$$

résulte

$$\Lambda \alpha_{11} + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = \frac{1}{2} l_{11},$$

et, en lui ajoutant les deux équations analogues, on pourra prendre, au lieu de l'expression précédente, celle-ci

$$\frac{1}{2l} (\Delta_1 \alpha^2 - \frac{1}{2} \Delta_1 l + \Lambda \Delta_1 \alpha).$$

On aura donc finalement

$$\omega^2 + \left[\frac{\Delta_1 \alpha}{\sqrt{l}} - \Lambda \left(\frac{1}{\sqrt{l}} \right) \right] \omega - \frac{1}{4l^2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + \frac{1}{2l} \left[\Delta_1 \alpha^2 - \frac{1}{2} \Delta_1 l + \frac{\Lambda (l \Delta_1 \alpha)}{l} \right] = 0,$$

équation assez remarquable.

Remarques sur les surfaces parallèles.

15. Lorsqu'on suppose l égal à l'unité, c'est-à-dire dans le cas de

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial z^2} = 1,$$

les surfaces (α) sont parallèles, et si l'on désigne par R, R_1 les rayons principaux de courbure de l'une des surfaces particulières (α_0) de la

série, les rayons principaux de courbures pour une surface quelconque (α) seront $\alpha - R, \alpha - R_1$. L'équation en ω , de la fin du numéro précédent, fournissant la somme des inverses de ces rayons, on aura, dans le cas présent,

$$\Delta_1 \alpha = \frac{1}{\alpha - R} + \frac{1}{\alpha - R_1},$$

c'est-à-dire l'importante formule de M. Bertrand. Si l'on prend pour coordonnées le paramètre α et les paramètres ρ, σ des deux séries de surfaces développables, qui forment avec α un triple système orthogonal, l'opération A ou $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$ reviendra simplement ici à $\frac{\partial}{\partial \alpha}$. En l'appliquant dans ce sens à l'équation précédente, et observant que R, R₁ sont indépendants de α , on en déduira

$$-A \Delta_1 \alpha = \frac{1}{(\alpha - R)^2} + \frac{1}{(\alpha - R_1)^2},$$

$$AA \Delta_1 \alpha = \frac{2}{(\alpha - R)^3} + \frac{2}{(\alpha - R_1)^3}.$$

L'élimination de R et R₁ entre ces deux équations et celle qui précède fournira

$$AA \Delta_1 \alpha + 3 \Delta_1 \alpha \cdot A \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \alpha^3 = 0.$$

Mais, tant pour enlever la restriction apportée ici au sens de l'opération A que pour rendre cette équation applicable au cas où α deviendrait imaginaire, on peut procéder comme il suit.

Puisque l est constant, on a

$$A \alpha_1 = 0,$$

d'où

$$A \alpha_{11} + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 0,$$

$$A \alpha_{12} + \alpha_{12} \alpha_{11} + \alpha_{22} \alpha_{12} + \alpha_{23} \alpha_{13} = 0.$$

De là résulte d'abord

$$A \Delta_1 \alpha + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + 2 \alpha_{12}^2 + 2 \alpha_{13}^2 + 2 \alpha_{23}^2 = 0,$$

et ensuite

$$AA \Delta_1 \alpha = 2[\alpha_{11}^2 + \dots + 3 \alpha_{11}(\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) + \dots + 6 \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{23}].$$

En retranchant des deux membres l'identité

$$6 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 6(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{13}^2 - \alpha_{33}\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{23})$$

dont le premier membre est ici zéro, on aura

$$\Delta\Delta_2\alpha = 2[\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + 3\Delta^2\alpha \cdot (\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2)].$$

Si l'on a égard à l'identité bien connue

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = \Delta_2\alpha \cdot (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}\alpha_{33}),$$

et que, en vertu de l'une des équations qu'on vient d'écrire, on remplace $\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2$, par $-\frac{1}{2}(\Delta_2\alpha + \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2)$, on reconnaîtra tout de suite que l'équation ci-dessus revient à

$$\Delta\Delta_2\alpha + 3\Delta_2\alpha \cdot \Delta_2\alpha + \Delta_2\alpha^2 = 0.$$

J'aurais pu rattacher cela à une transformation un peu plus générale; mais, n'ayant pas à faire usage de la formule à laquelle je fais allusion, je me borne à ce cas particulier.

Enfin je rappellerai, toujours à propos des surfaces parallèles, que les variables ρ et σ , dont il a été question au commencement du présent paragraphe, donnent lieu aux relations

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial z^2} = \frac{M}{(\alpha - R)^2},$$

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\sigma^2}{\partial z^2} = \frac{N}{(\alpha - R_1)^2},$$

M et N étant des fonctions de ρ et σ seulement. Ces formules se déduisent facilement des formules de Lamé [*Coordonnées curvilignes*, p. 76 et 78, équations (8) et (9)]. On peut aussi les établir de diverses manières, comme, par exemple, je l'ai fait au tome V (2^e série) des *Annali di Matematica*.





ANNALES SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUPPLÉMENT
AU
TOME VII — ANNÉE 1878
(DEUXIÈME SÉRIE).

S. 1



RECHERCHES
SUR L'ORIGINE ET LE DÉVELOPPEMENT
DES
ORGANISMES MICROSCOPIQUES,

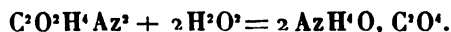
PAR M. CH. CHAMBERLAND.

On sait que les substances organiques, animales ou végétales, une fois soustraites à l'influence de la vie, éprouvent, lorsqu'on les abandonne dans l'air à une température convenable, des altérations ou décompositions qui sont dues à la présence et au développement d'organismes microscopiques, parmi lesquels se trouvent les ferments.

Ainsi, par exemple, de l'urine est abandonnée au contact de l'air à la température de 20 ou 25 degrés : le liquide préalablement acide ne tarde pas à devenir alcalin ; il se trouble, et l'on constate la présence d'organismes microscopiques : bactéries, torulas, moisissures, etc. Parmi ces organismes, il y en a un qui ne fait jamais défaut lorsque le liquide devient franchement alcalin ; il a été signalé pour la première fois par M. Pasteur, et étudié d'une façon toute particulière par M. Van Tieghem, dans un remarquable travail présenté, en 1864, à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de docteur. Cet organisme est constitué par un grand nombre de points généralement associés deux à deux, et sa présence est accusée dans le liquide par des trainées blanches qui se déposent sur les parois du vase. Si on le sème dans de l'urine acide rendue stérile par l'action de la chaleur, il se développe,

S. r.

et l'urine devient alcaline. Cet organisme particulier a donc la propriété de transformer l'urée contenue dans l'urine en carbonate d'ammoniaque, en fixant sur l'urée 4 équivalents d'eau :



Il a reçu le nom de *ferment ammoniacal de l'urée*.

De même, si l'on écrase des raisins, le jus qui en résulte, et qui est d'abord très-sucré, perd bientôt sa saveur et devient alcoolique; en même temps, il se dégage de toute la masse une quantité de bulles d'acide carbonique, et au microscope on voit de nombreuses cellules pouvant affecter des formes un peu variables. Toutes les fois qu'un liquide sucré éprouve la fermentation alcoolique, on retrouve ces cellules; si on les sème dans un jus sucré conservé par l'ébullition, la fermentation se produit. Ces cellules, qui jouissent de la propriété spéciale de décomposer le sucre, en donnant principalement de l'alcool et de l'acide carbonique, portent le nom de *ferment alcoolique*.

Toutes les autres substances organiques se décomposent de même sous l'influence d'organismes microscopiques plus ou moins bien connus.

Mais d'où viennent ces organismes? Naissent-ils spontanément ou dérivent-ils de parents semblables à eux?

L'historique de cette question a été fait par M. Pasteur dans un travail publié en 1862, dans les *Annales de Chimie et de Physique*. et intitulé : *Mémoire sur les corpuscules organisés qui existent dans l'atmosphère, examen de la doctrine des générations spontanées*. Je n'y reviendrai donc pas. Il me suffira de dire que cette dernière doctrine était généralement abandonnée lorsqu'en 1871, à la suite d'une réponse de M. Pasteur à Liebig, devant l'Académie des Sciences, M. Fremy raviva la question.

Dans la théorie de M. Pasteur, les organismes microscopiques dérivent tous de parents semblables à eux; ils viennent de l'extérieur, où ils existent sous une forme qui diffère souvent de celle que nous leur connaissons lorsqu'ils se développent dans les substances organiques, forme sous laquelle on les appelle des *germes*. Comme ces germes sont très-petits, ils doivent se retrouver dans les poussières que l'air tient en suspension, absolument de la même manière que les

spores des moisissures : de là le nom de *panspermie atmosphérique* donné quelquefois à cette théorie (').

Dans la théorie de M. Fremy, au contraire, « les poussières de l'air n'interviennent pas dans la génération des ferments; les milieux organiques sont doués d'une force végétative qui leur permet, au contact de l'air et par l'action de l'oxygène, de créer des ferments sans l'intervention des germes atmosphériques » (p. 8 de la brochure citée plus loin). En un mot, les ferments naissent spontanément, par le simple contact des substances organiques avec l'oxygène de l'air. Cette théorie a reçu de son auteur le nom d'*hémiorganisme*, et les substances qui engendrent les ferments le nom de *corps hémiorganisés*, pour « rappeler que ces corps ont souvent une organisation incomplète » (p. 6).

On voit que ces deux théories sont tout à fait opposées, et, comme les conséquences à en tirer, surtout au point de vue des maladies produites par la présence et le développement d'organismes microscopiques, sont de la plus haute importance, on comprend que la discussion ait passionné le monde savant. Cette discussion eut lieu devant l'Académie des Sciences, dans le courant de l'année 1871-1872. Les arguments en faveur de chacune des théories furent longuement développés par leurs auteurs, et l'on aurait pu croire le débat terminé lorsque, au commencement de l'année 1876, M. Fremy fit paraître un Ouvrage intitulé : *Sur la génération des ferments*, dans lequel, après avoir résumé la discussion qui eut lieu devant l'Académie, l'auteur, loin de se montrer convaincu par les arguments de M. Pasteur, maintient sa théorie et accentue son désaccord, par exemple, en ces termes :

« Je crois être en mesure de démontrer que la théorie de M. Pasteur n'est pas admissible; en faisant dépendre la production des ferments des poussières qui sont en suspension dans l'air, et en refusant aux milieux organiques la faculté d'engendrer des ferments, M. Pasteur est conduit à des impossibilités évidentes et se trouve en opposition avec des faits incontestables » (p. 7).

Bien que la théorie de l'hémiorganisme compte peu de partisans

(') Il est bon de faire remarquer toutefois que cette expression n'a jamais été employée par M. Pasteur.

aujourd'hui, j'ai pensé que je pourrais être utile aux autres et à moi-même en appliquant aux doutes que soulève à chaque pas le travail de ce savant Membre de l'Académie des Sciences les méthodes employées dans le laboratoire de M. Pasteur, où je travaille depuis trois ans.

J'ai été conduit d'ailleurs à faire beaucoup d'expériences nouvelles, et que je crois originales, au sujet des questions que soulèvent le développement de certains organismes microscopiques et leur résistance à l'action de la chaleur.

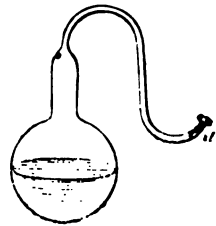
Conservation des liquides organiques soumis à l'ébullition.

Dès le début de ses travaux sur les fermentations, M. Pasteur chercha à réaliser les conditions nécessaires et suffisantes pour conserver des liquides organiques au contact de l'air. Pour cela il fallait : 1° tuer les germes pouvant exister dans le liquide; 2° mettre ce liquide en présence d'un air pur, c'est-à-dire ne contenant lui-même pas de germes de ferments.

Il réalisa ces deux conditions en faisant bouillir le liquide dans un ballon communiquant avec un tube de platine chauffé au rouge, puis laissant refroidir. L'ébullition avait tué les germes contenus dans le ballon, et l'air qui rentrait pendant le refroidissement était lui-même exempt de germes, ceux-ci ayant été brûlés pendant leur passage dans le tube de platine chauffé. Aussi, dans ces conditions, les liquides les plus altérables, tels que le bouillon de ménage, l'eau de levûre, l'urine, etc., se conservaient parfaitement. On objecta que l'air, ayant été calciné, avait peut-être perdu un principe subtil, inconnu d'ailleurs, mais nécessaire pour provoquer les fermentations, et que les résultats ne seraient pas les mêmes si, au lieu d'air calciné, on faisait rentrer dans le ballon de l'air ordinaire dépouillé de toutes ses poussières. M. Pasteur étira alors le ballon en forme de col de cygne (*fig. 1*) après y avoir introduit le liquide fermentescible. Il fit bouillir pendant quelques instants et, au moment de cesser l'ébullition, il plaça en *a* une petite bourre d'amiante venant d'être passée dans la flamme d'une lampe à alcool. L'air qui rentre pendant le refroidissement filtre sur la

bourre, où il dépose toutes les poussières qu'il renferme. Il faut ajouter que, le plus souvent, cette bourre n'est même pas indispensable, car l'air, rentrant lentement, dépose toutes ses poussières dans les sinuosités du col de l'appareil. Des ballons préparés de cette manière par

Fig. 1.

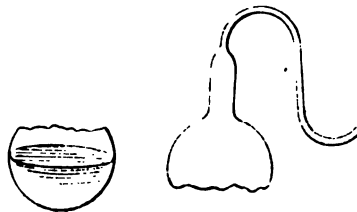


M. Pasteur, depuis plus de quinze ans, en sont la meilleure preuve : ils sont complètement recouverts de poussière, et cependant le liquide intérieur est parfaitement limpide et intact. Remarquons que l'air se renouvelle constamment par suite de la diffusion et des variations de température et de pression.

A cette expérience M. Fremy répond :

• Si les liquides fermentescibles placés dans les ballons de M. Pasteur n'éprouvent plus d'altération, ce n'est pas parce que ces liquides ont été mis à l'abri des germes de ferments par les sinuosités du col de

Fig. 2.



l'appareil : c'est simplement parce que le liquide producteur a été tué par l'ébullition » (p. 25). Mais enlevons la partie supérieure du ballon (*fig. 2*), ainsi que l'a indiqué M. Pasteur dans son Mémoire de 1862, ou

encore faisons bouillir le liquide dans un ballon sans précautions particulières; quelques jours après, les organismes pullulent.

D'ailleurs, M. Fremy ne paraît pas satisfait de son interprétation, car il ajoute immédiatement : « On peut même expliquer la stérilité des liquides placés dans les ballons sans avoir recours à l'explication fondée sur l'action de la chaleur, mais en se fondant sur l'altération de l'air, comme M. Victor Meunier l'a proposé le premier dans un travail très-important. Je démontrerai, par de nombreuses observations, que tout liquide organique abandonné dans un ballon à col effilé agit rapidement sur l'air; lors même que le col est ouvert, l'oxygène s'y trouve bientôt remplacé par de l'acide carbonique; or, dans un pareil mélange d'azote et d'acide carbonique, les phénomènes d'organisation deviennent impossibles; les ferments ne peuvent donc pas y prendre naissance » (p. 25).

Mais M. Pasteur a donné depuis longtemps des analyses d'air de ballons conservés par l'ébullition, et il a reconnu que la composition de cet air était à très-peu près la même que celle de l'air atmosphérique ordinaire. Voici quelques-uns des nombres que j'extraits de son Mémoire de 1862 :

Analyse, le 14 avril 1860, d'un ballon d'urine qui était à l'étuve depuis le 13 février :

O...	19,3
CO ²	3,9
Az par différence.....	76,8
	<u>100,0</u>

Analyse d'un ballon de lait chauffé à 110 degrés :

O.....	18,37
CO ²	0,16
Az par différence.....	81,47
	<u>100,00</u>

En 1865, la Commission nommée par l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, pour juger le différend existant entre M. Pasteur et MM. Pouchet, Joly

(1) Commissaires : MM. Flourens, Dumas, Milne Edwards, Balard, rapporteur. (*Comptes rendus*, t. LX, p. 384.)

et Musset, constata que, dans un ballon d'eau de levûre conservée depuis quatre ans par M. Pasteur, la composition de l'air était « exactement » la même que celle de l'air atmosphérique.

Bien plus, M. Fremy a donné lui-même des analyses d'air faites sur des ballons à col effilé et recourbé, et j'y trouve les nombres suivants (p. 96) :

NATURE DES SUBSTANCES mises en expérience.	DATE de la mise en expérience.	DATE de l'analyse.	TEMPÉRA- TURE du chauffage.	DURÉE du chauffage.	QUANTITÉS d'oxygène et d'acide carbonique contenues dans les ballons après l'expérience.	
					Oxygène pour 100 d'air.	Acide carbonique pour 100 d'air.
Lait normal	2 mars.	20 nov.	100°	10 ^m	20	0
Id	20 févr.	20 nov.	100	15 ^m	21	0
Id	20 nov.	2 déc.	100	5 ^m	20	0
Id	23 févr.	23 nov.	110	30 ^m	21	0
Id	23 févr.	23 nov.	115	1 ^h	21	0
Lait sucré et carbonate de chaux.	8 févr.	27 nov.	100	30 ^m	21	0
Moût de bière	24 juill.	26 nov.	100	1 ^h	21	0
Jus de raisin filtré	7 oct.	25 nov.	100	2 ^m	21	0
Jus de raisin éclairci à l'air	2 mars.	25 nov.	100	2 ^m	21	0
Eau sucrée + levûre	21 févr.	24 nov.	100	3 ^m	21	0
Bouillon de levûre + poussières.	18 févr.	23 nov.	100	15 ^m	21	0

Dans toutes ces expériences, il ne s'est pas formé trace d'acide carbonique. Dans le même Tableau, on trouve, il est vrai, des analyses dans lesquelles l'oxygène a presque complètement disparu et se trouve remplacé par de l'acide carbonique; mais je ferai remarquer que ces nombres se rapportent à des liquides qui n'ont pas été soumis à l'ébullition et qui, par conséquent, ont dû s'altérer. Or M. Pasteur a montré que, par l'altération, l'oxygène disparaît rapidement.

Revenons à la première explication, d'après laquelle les substances hémiorganisées auraient été tuées par l'action de la chaleur. Si l'on coupe le col du ballon de façon à mettre le liquide au libre contact de l'air, non dépouillé de ses poussières, l'altération ne tarde pas à se produire. Comme M. Fremy n'admet pas l'existence des germes de

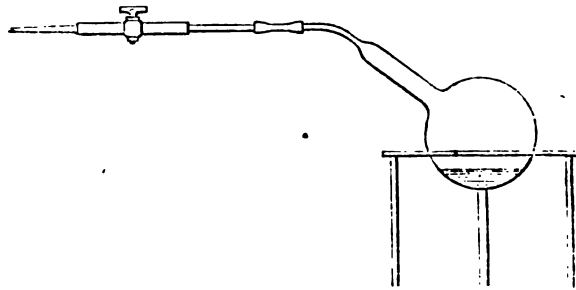
ferments dans l'air, cette expérience suffirait pour infirmer son interprétation. Mais nous verrons que les germes des ferments existent dans l'air. Les partisans de l'hémiorganisme pourraient donc admettre ce dernier fait, pour expliquer l'expérience précédente, et soutenir néanmoins que les substances organiques naturelles placées dans des conditions convenables peuvent engendrer directement des ferments sans l'intervention des germes extérieurs.

Conservation de l'urine et du sang retirés directement de l'organisme.

Il n'y avait qu'un moyen de lever cette objection : c'était d'obtenir des liquides naturels n'ayant pas été chauffés, et cependant se conservant sans altération à l'abri des poussières de l'air. C'est ce que fit M. Pasteur. Il annonça en effet, en 1863, que du sang et de l'urine, retirés directement de l'organisme, avec les précautions nécessaires pour éviter l'accès des poussières de l'air, pouvaient se conserver indéfiniment sans qu'on vit jamais apparaître dans leur intérieur le moindre organisme microscopique. Voici comment il opérait (¹) :

« Je me suis servi, dit-il, d'un ballon de verre joint à un robinet de laiton par un tube de caoutchouc, comme l'indique la *fig. 3*. Les deux

Fig. 3.



branches du robinet ont environ 0^m,12 ; celle qui est libre est un peu effilée, comme l'extrémité d'une canule. Afin de purger ce ballon de

(¹) Voir *Études sur la bière*, p. 46.

tout germe intérieur, on fait communiquer l'extrémité libre du tube de laiton avec un tube de platine fortement chauffé, après avoir eu soin d'introduire dans le ballon une petite quantité d'eau qu'on réduit en vapeur; puis on laisse refroidir le ballon dans lequel rentre de l'air qui a passé par le tube chaud.

» On peut faire bouillir l'eau dans le ballon à une température supérieure à 100 degrés, en adaptant à l'extrémité libre du tube de platine un tube de verre recourbé à angle droit, qui plonge plus ou moins dans une cuvette profonde remplie de mercure. Pendant que l'eau est en ébullition sous pression, on sépare le tube qui plonge dans le mercure: l'eau continue à bouillir dans le ballon à la pression ordinaire; on laisse alors refroidir le ballon, qui se remplit peu à peu d'air porté à une température élevée, plus que suffisante pour brûler toutes les poussières organiques que cet air peut renfermer.

» Quand le ballon est refroidi, on le détache après avoir fermé le robinet, et l'on passe à la préparation d'autres ballons semblables. Il est utile de fermer le robinet du ballon lorsque la température de ce dernier est encore de quelques degrés au-dessus de la température ambiante; par cette précaution, l'air du ballon refroidi se trouve à une pression moindre que la pression extérieure.

» Dans l'intervalle qui s'écoule entre la préparation d'un ballon et le moment où l'on s'en sert, il est bon de tenir la branche libre du robinet inclinée vers le bas, afin de garantir l'intérieur de son canal contre le dépôt des poussières extérieures. Quoi qu'il en soit, au moment où l'on doit mettre le ballon en expérience, il faut avoir soin de chauffer cette branche à l'aide de la flamme d'une lampe à alcool.

» S'agit-il de l'étude du sang, on le prendra sur un animal vivant, un chien, par exemple; on met à nu une veine ou une artère de l'animal, on pratique une incision dans laquelle est introduite l'extrémité de la branche libre du robinet, préalablement chauffée et refroidie, qu'on fixe par une ligature dans la veine ou l'artère, puis on ouvre le robinet: le sang coule dans le ballon; on referme le robinet et l'on porte le ballon dans une étuve à une température déterminée.

» Pour l'urine on opère à peu près de la même manière. L'extrémité de la branche libre du robinet est introduite dans le canal de l'urèthre;

au moment de l'émission de l'urine on tourne le robinet, et l'urine est lancée dans le ballon, qu'on remplit à moitié ou au tiers environ.

» Voici les résultats de ces expériences :

» Le sang ne se putréfie pas, même aux plus hautes températures de l'atmosphère; son odeur reste celle du sang frais ou prend une odeur de lessive.

» L'urine se comporte d'une manière analogue : elle n'éprouve aucune altération profonde; sa coloration prend seulement une teinte brun rougeâtre; elle dépose des cristaux en petite quantité, mais sans se troubler ni se putréfier d'aucune façon. »

A ces résultats M. Fremy répond que « la conservation des liquides organiques n'est pas due, comme le pense M. Pasteur, à l'absence des poussières atmosphériques, mais, comme le disait Needham, *aux exhalaisons du liquide organique, qui altèrent l'air des appareils et empêchent les ferments de se développer*. Je soutiens, dit-il, que, dans tous les appareils où un liquide organique se conserve, l'air ne présente plus sa composition normale » (p. 29).

A cet effet il donne des analyses qu'il a faites sur l'air contenu dans des ballons à col effilé et recourbé dans lesquels se trouvaient des liquides organiques *non chauffés*. Voici quelques-uns des nombres que j'y trouve (p. 96) :

NATURE DES SUBSTANCES mises en expérience.	DATE de la mise en expérience.	DATE de l'analyse.	QUANTITÉS d'oxygène et d'acide carbonique contenus dans les ballons après l'expérience.	
			Oxygène pour 100 d'air	Acide carbonique pour 100 d'air.
Lait normal.....	20 novembre.	23 novembre.	0	18
Id.....	20 novembre.	25 novembre.	0	19
Lait récemment trait.....	27 novembre.	2 décembre.	0	22
Id.....	27 novembre.	29 novembre.	12	5
Lait sucré.....	20 mars.	25 novembre.	0	19
Moût de bière.....	23 juillet.	26 novembre.	2	22
Jus de raisin limpide.....	6 novembre.	28 novembre.	4	86
Jus de raisin trouble.....	10 octobre.	25 novembre.	16	12
Jus filtré.....	10 octobre.	25 novembre.	11	24

« Ces résultats, dit M. Fremy, conduisent aux conséquences suivantes, qui me paraissent importantes au point de vue de la discussion que je soutiens contre M. Pasteur :

» 1° Les liquides organiques abandonnés dans un ballon à col effilé, recourbé et ouvert, peuvent, suivant leur nature, agir sur l'atmosphère du ballon et modifier profondément sa composition. Dans ce cas, l'oxygène de l'air est absorbé par la substance organique et remplacé d'une manière plus ou moins complète par de l'acide carbonique.

» 2° Cette absorption de l'oxygène par les substances hémiorganisées se fait souvent avec une grande rapidité (p. 98).

» 3° Les analyses consignées dans le Tableau précédent prouvent que des ballons dont le col effilé est resté ouvert pendant près d'une année contiennent, dans leur intérieur, un gaz bien différent de l'air atmosphérique, et qui est formé presque exclusivement d'azote et d'acide carbonique.

» Ainsi, dans l'appareil à col effilé, recourbé en col de cygne et ouvert, qui a été employé si fréquemment par M. Pasteur, l'air se modifie, quant à sa composition chimique, sous l'influence des liquides organiques qui s'y trouvent ; par conséquent, ces liquides, abandonnés dans des appareils de cette nature, ne sont pas dans des conditions normales ; les phénomènes qui s'y produisent ne peuvent donc pas être comparés à ceux qui se réaliseraient dans de l'air atmosphérique ordinaire (p. 99).

» 4° Lorsque M. Pasteur montre des liquides organiques qui se conservent dans des appareils fermés ou dans des ballons à col effilé et ouvert, et qu'il attribue leur conservation à l'absence des germes de l'air, on peut lui dire que cette conservation est due, soit à l'ébullition qui a tué la substance hémiorganisée vivante contenue dans le liquide, soit à la décomposition qu'éprouve l'air dans son contact avec les corps organiques ; dans ce dernier cas, c'est l'acide carbonique produit aux dépens de l'oxygène atmosphérique qui s'oppose à l'altération du liquide, lors même qu'il n'a pas été porté à l'ébullition » (p. 101).

Mais remarquons que M. Fremy ne s'est pas placé dans les mêmes conditions que M. Pasteur. En effet, dans les expériences de M. Pasteur, le liquide organique se *conserve*, tandis que dans celles de M. Fremy il

s'altère. Le lait, sur lequel opère de préférence M. Fremy, est précisément un liquide des plus difficiles à conserver. Comme l'a montré M. Pasteur, la composition de l'air d'un ballon se modifie profondément lorsque le liquide s'altère, mais les conséquences qu'on déduit de ce fait ne prouvent absolument rien pour le cas où il y a conservation.

Pour réfuter les expériences de M. Pasteur, M. Fremy cite encore le fait suivant (p. 104) :

« J'ai introduit, dit-il, dans des ballons dont le col était ensuite fermé à la lampe, et qui contenaient, par conséquent, de l'air ordinaire, des liquides organiques, tels que du sang sortant des veines d'un chien, de l'urine au moment de son émission et différents suc de fruits.

» Ces liquides, avant d'être placés dans les ballons, ont été exposés à l'air; les suc de fruits ont même été filtrés lentement et soumis pendant plusieurs heures à l'influence des poussières atmosphériques.

» Dans la théorie de M. Pasteur, ces liquides, ayant été exposés à l'air et abandonnés dans de l'air ordinaire non purifié, devraient être chargés de germes atmosphériques et s'altérer toujours.

» Eh bien, dans de nombreuses observations, j'ai constaté que ces liquides se conservent souvent sans altération. Il y a quelques jours, j'ouvrais, devant plusieurs chimistes attachés à mon laboratoire, des ballons contenant du sang et de l'urine, abandonnés depuis un an dans de l'air ordinaire; ces liquides ne paraissaient pas altérés; ils n'avaient pas d'odeur désagréable et n'avaient pas dégagé de gaz.

» J'attribue ces résultats à l'action chimique des liquides qui absorbent rapidement l'oxygène et qui produisent une atmosphère d'azote et d'acide carbonique, dans laquelle les organismes ne peuvent pas se développer ».

« Ces liquides ne paraissaient pas altérés », mais je ne trouve aucune observation microscopique pour le prouver. En admettant que ces ballons ne soient pas altérés, on doit se demander alors comment il se fait que *tous* les ballons ne se conservent pas. Est-ce que l'action chimique des liquides sur l'air ne se produirait pas dans tous? Ce que je puis affirmer, c'est que, dans un grand nombre d'expériences faites sur l'urine, il ne m'est arrivé qu'*une seule fois* de ne pas avoir d'altération.

Loin d'attribuer ce résultat à l'action chimique du liquide qui modifie la composition de l'air placé au-dessus, je l'attribue à ce que, par hasard, il n'y avait pas de germes dans ce ballon. Si les germes se trouvent très-répandus dans l'air, particulièrement pour les organismes qui peuvent se développer dans l'urine et dans le sang, cependant jamais M. Pasteur n'a avancé que, dans la plus petite parcelle d'air, il devait nécessairement y en avoir : il a prouvé le contraire (1). Nous verrons, en particulier, que les germes des ferments alcooliques sont peu nombreux dans l'air, surtout à certaines époques de l'année.

Examinons l'assertion de M. Fremy, d'après laquelle la conservation du sang et de l'urine non chauffés, serait due à une modification « profonde » dans la composition de l'air du ballon.

D'abord, M. Pasteur a constaté que (2), « contrairement à ce qu'on aurait pu croire, l'oxydation directe des principes du sang par combustion lente n'est pas très-active : après une exposition des ballons dans une étuve à 25 ou 30 degrés, pendant plusieurs semaines, on n'observe encore qu'une absorption de 2 à 3 pour 100 de gaz oxygène, lequel est remplacé par un volume sensiblement égal de gaz acide carbonique.

» L'oxydation directe des matériaux de l'urine est également très-faible. Après quarante jours, l'analyse de l'un des ballons a fourni :

O.....	19,2
CO ²	0,8
Az.....	80,0
	<hr/>
	100,0

Ainsi la proportion d'acide carbonique est très-faible, lors même que le ballon est complètement fermé.

Voici maintenant des analyses que j'ai faites sur des ballons d'urine communiquant librement avec l'air. Nous verrons tout à l'heure comment ils avaient été préparés. Au bout de dix jours, pendant lesquels

(1) Voir son Mémoire de 1862, déjà cité.

(2) *Études sur la bière*, p. 49.

la température avait été de 25 à 30 degrés, j'ai obtenu :

O.	18,3
CO ²	1,8
Az	<u>79,9</u>
	100,0

L'analyse de l'air d'un autre ballon conservé depuis neuf mois environ a donné :

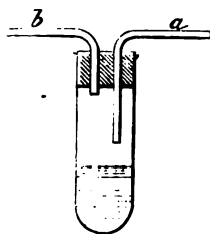
O	17,8
CO ²	2,1
Az.....	<u>81,1</u>
	100,0

De tous ces résultats on peut conclure que la proportion d'acide carbonique contenue dans l'air des ballons d'urine naturelle conservée est toujours très-faible; cependant ce gaz y existe en petite quantité d'une façon constante, et les adversaires de la théorie de M. Pasteur pourraient vouloir que l'air fût de composition normale.

Faisons mieux, pour juger nettement leur hypothèse : mettons de l'urine fraîche en contact avec une atmosphère d'acide carbonique ou d'azote, ou d'un mélange de ces deux gaz. Dans l'hypothèse de M. Fremy, *a fortiori*, il ne doit pas y avoir d'altération.

J'ai donc pris des tubes à essai dans lesquels j'ai mis de l'urine

Fig. 4.



au moment de son émission. Les tubes étaient fermés par un bouchon de caoutchouc percé de deux trous, dans lesquels passaient deux tubes de verre recourbés à angles droits, comme l'indique la *fig. 4*. L'un des

tubes *a* descendait tout près du niveau du liquide, et c'est par ce dernier qu'on faisait arriver le courant d'acide carbonique ou d'azote. En recueillant le gaz qui se dégage par l'autre tube, il est facile de constater le moment où tout l'air a été chassé et remplacé par du gaz pur. Ce résultat est atteint pour l'acide carbonique, lorsque le gaz qui se dégage est complètement absorbé par la potasse, et pour l'azote (préparé en faisant passer un courant d'air sur de la tournure de cuivre chauffée) lorsqu'il n'y a plus d'absorption par l'acide pyrogallique et la potasse. Pour avoir une atmosphère d'acide carbonique et d'azote, je faisais passer quelques bulles d'acide carbonique dans le tube préalablement rempli d'azote.

A l'aide d'une lampe d'émailleur, je fermais les tubes coudés en *a* et *b*. Dans certains cas, je n'attendais pas que le gaz qui se dégageait fût pur; je me rapprochais ainsi davantage des conditions dans lesquelles se trouve placée l'urine normale pendant sa conservation. Les tubes furent alors placés dans l'étuve, à la température de 25 ou 30 degrés, avec d'autres tubes témoins dans lesquels se trouvait de l'air ordinaire.

Résultats. — Dans tous les cas il y eut altération; le liquide commençait à se troubler au bout de quelques jours; on vérifiait avec le papier de tournesol qu'il était devenu alcalin, tandis qu'il était acide primitivement. En même temps on constatait au fond des tubes la présence du petit ferment de l'urée. Dans les tubes où il y avait de l'air, il se formait assez souvent un voile blanchâtre à la surface. Ce voile, déjà signalé par M. Pasteur, apparaît fréquemment sur l'urine abandonnée au contact de l'air à une température inférieure à 20 degrés; il est formé de cellules rondes dont les dimensions sont plus petites que celles de la levûre de bière. Quelquefois aussi on voyait apparaître des moisissures au bout de deux ou trois jours; dans ce cas, l'oxygène était rapidement absorbé et l'urine se trouvait en contact d'un mélange d'azote et d'acide carbonique. L'altération se produisait à peu près en même temps dans les différents tubes.

Ces résultats nous permettent de conclure rigoureusement que la conservation de l'urine normale ne peut pas être attribuée à l'altération dans la composition de l'air des ballons, comme le pense M. Fremy. Il y a plus : on peut mettre de l'urine dans des tubes effilés et les fermer

ensuite à la lampe de façon à laisser une quantité d'air presque insignifiante : l'altération se produit encore.

Comme l'altération de l'air dans les ballons où l'on conserve des liquides organiques naturels non chauffés est la seule cause que puissent invoquer les partisans de l'hémiorganisme pour soutenir leur théorie, il m'a paru important de montrer que ces liquides organiques peuvent se conserver en présence d'un air ayant exactement la même composition que l'air atmosphérique. Pour cela, il fallait faire passer un courant d'air continu dans les appareils.

J'ai adopté à cet effet la disposition suivante :

Au lieu d'un ballon pour recevoir l'urine, je me sers d'un tube à essai, fermé par un bouchon de caoutchouc percé de deux trous, dans chacun desquels passe un petit tube de verre, *a*, *a'* (*fig. 5*), portant à son extrémité un tube de caoutchouc *b*, *b'*. L'un de ces tubes *a* est recourbé, l'autre est seulement incliné, comme le montre la figure. Je mets de l'eau distillée au fond du tube et je la fais bouillir; la vapeur s'échappe par les caoutchoucs *b* et *b'*. Je pince alternativement chacun

Fig. 5.

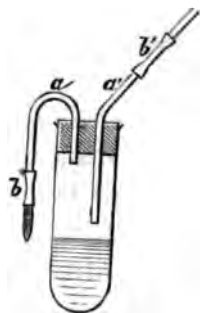


Fig. 6.



d'eux de façon à forcer la vapeur d'eau à sortir tantôt par l'un, tantôt par l'autre. Lorsque l'ébullition a duré quelques minutes, je bouche le caoutchouc *b'* avec un tube de verre plein venant d'être passé dans la flamme; la vapeur continue à se dégager en *b*. Après une ou deux minutes, j'arrête l'ébullition de l'eau et immédiatement j'introduis un tube de verre rempli d'amiante flambé (*fig. 6*) dans le caoutchouc *b*. Pendant le refroidissement, l'air qui rentre dans l'appareil filtre à tra-

vers cette colonne d'amiante, sur laquelle se déposent toutes les poussières. On prépare ainsi une série de tubes semblables.

Au moment où l'on veut s'en servir, on commence par flamber le caoutchouc *b'*, ainsi que le tube plein; on retire ce dernier et on le remplace par un tube creux ouvert à ses deux extrémités et qui vient d'être flambé; on pince le caoutchouc *b'* à l'aide d'une pince de Mohr, on introduit l'extrémité libre du tube creux dans le canal de l'urèthre, on ouvre la pince, et, pendant que l'urine coule dans le tube, l'air s'échappe par la branche recourbée et le tube d'amiante placé à l'extrémité. Lorsque le niveau de l'urine est voisin de l'extrémité du tube *a'*, on pince de nouveau le caoutchouc *b'*, on retire le tube du canal, et immédiatement on y adapte un caoutchouc sortant de l'eau bouillante et un tube d'amiante identique à celui qui est à l'extrémité de la branche recourbée. On enlève la pince; l'urine qui était restée dans le tube incliné achève de s'écouler et l'air qui remplace le liquide filtre à travers le second tube d'amiante.

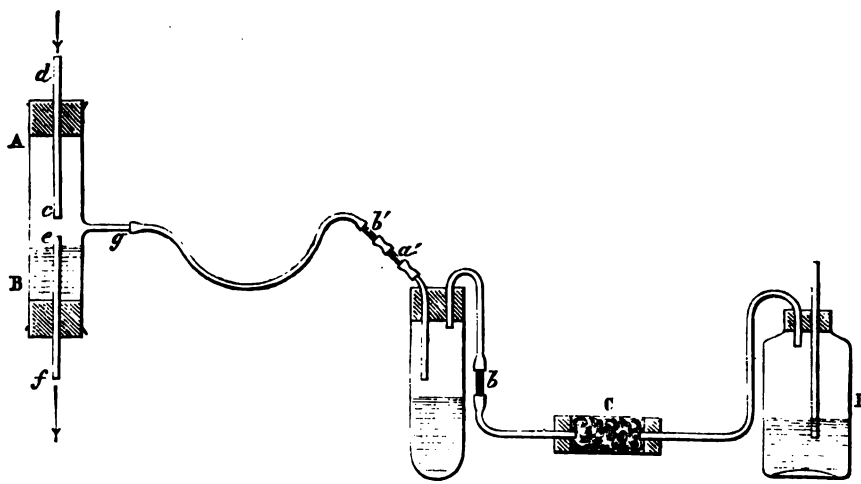
Par cette méthode, l'urine se conserve presque toujours sans altération; quelques flocons de mucus se déposent au fond des tubes ainsi que des cristaux rougeâtres d'acide urique. Sur plus de trente tubes faits de cette manière, quatre ou cinq seulement se sont altérés.

Il peut paraître assez surprenant, au premier abord, que, malgré toutes les précautions indiquées ci-dessus, il y ait toujours un petit nombre de tubes qui s'altèrent; mais il faut remarquer qu'il y a deux instants pendant lesquels les poussières de l'air peuvent pénétrer dans l'appareil, savoir: lorsque le tube de verre va être introduit dans le canal de l'urèthre et lorsqu'on le retire avant de mettre le caoutchouc muni de son tube d'amiante. Ces instants sont très-courts, il est vrai, mais enfin ils peuvent suffire dans quelques cas pour permettre l'introduction des poussières et provoquer l'altération de l'urine. Mais il y a une autre cause d'altération beaucoup plus importante que les deux précédentes: je veux parler des organismes et du ferment ammoniacal, qui doivent se trouver fréquemment à l'orifice du canal de l'urèthre. En effet, après chaque émission d'urine, il reste toujours à l'extrémité du canal une petite quantité de liquide dans lequel le ferment de l'urée peut se développer. Aussi suffit-il souvent de laver cette extrémité avec une goutte d'eau distillée et d'examiner cette goutte au mi-

croscopie pour constater l'existence de ce ferment. Il faut donc avoir soin, au moment où l'on introduit le tube de verre, de ne pas toucher à la partie du canal qui est au contact de l'air. Il vaudrait même mieux, comme le conseille le D^r Lister, d'Édimbourg, laver cette extrémité avec une dissolution d'acide phénique au $\frac{1}{40}$. Mais, comme on aurait pu objecter que la trace d'acide phénique restant s'opposait à l'altération, j'ai préféré obtenir de l'urine tout à fait naturelle et ne pas me servir de la dissolution d'acide phénique.

Maintenant que nous sommes en possession d'un procédé nous donnant presque à coup sûr de l'urine stérile, il est très-facile de faire passer un courant d'air continu dans le tube. Je me suis servi, à cet effet, d'une petite trompe en verre formée d'un tube AB, d'un diamètre de 2 centimètres environ, fermé à chacune de ses extrémités par un bouchon de caoutchouc traversé par de petits tubes de verre dont les extrémités *c* et *e* sont voisines l'une de l'autre (*fig. 7*). En face se trouve

Fig. 7.



un petit tube *g*, soudé sur le grand tube AB. A l'aide d'un caoutchouc on fait communiquer ce tube *g* avec le tube d'urine; ce dernier est lui-même en communication d'abord avec un tube rempli de coton C, puis avec un flacon D contenant de l'eau distillée. Ce flacon est destiné à montrer le passage de l'air. On met l'extrémité *d* en communication

avec un robinet qu'on tourne de façon que l'eau s'écoule goutte à goutte par l'extrémité *c*. On constate alors que chaque goutte, en pénétrant dans le tube *ef*, entraîne une bulle d'air; on a donc une aspiration dans le tube d'urine. On peut, avec cette petite trompe, faire passer le courant d'air aussi lentement qu'on le veut, chaque goutte d'eau produisant une aspiration d'une bulle d'air, comme l'indique le flacon D.

Pendant vingt jours consécutifs, j'ai fait passer ainsi un courant d'air continu dans un tube d'urine normale à la température de 25 degrés environ. Au bout de ce temps, l'urine était restée parfaitement limpide, sans avoir donné naissance à la moindre production organique. Au papier de tournesol, elle était acide comme avant le passage de l'air.

J'ai cessé l'expérience au bout de vingt jours, pensant que ce temps était bien suffisant, car généralement l'urine s'altère et se trouble à la température de 25 degrés au bout de deux ou trois jours environ. Il est évident qu'on aurait pu prolonger l'expérience aussi longtemps qu'on l'aurait voulu, et le résultat aurait été le même.

Le tube de coton C a pour but d'arrêter les poussières venant du flacon, dans le cas où le petit tube d'amiante qui est en *b* ne suffirait pas pour arrêter toutes les poussières d'un courant d'air qui dure aussi longtemps.

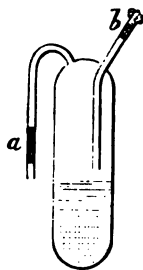
Remarquons que l'air qui est dans le tube d'urine a exactement la même composition que l'air extérieur; on ne peut même pas invoquer la formation d'une couche d'acide carbonique à la surface du liquide, car un des petits tubes *a'*, *b'* descend tout près du niveau de l'urine. De plus, le courant d'air commence à passer dès que l'urine a été introduite dans le tube. Cette précaution n'est pas inutile, car, si l'on attendait quelque temps avant de faire passer ce courant d'air, les partisans de la théorie de l'hémiorganisme pourraient objecter que la matière albuminoïde qui, d'après eux, produit les ferments a été tuée par la très-petite quantité d'acide carbonique formé. Je dois faire observer, d'ailleurs, que, l'oxydation de l'urine ayant toujours lieu, on n'opérerait plus sur un liquide de même nature et de même composition.

Au moment où j'ai fait ces expériences, je pensais qu'il suffisait de faire bouillir de l'eau pendant quelques minutes dans un appareil pour le priver complètement de germes; mais j'ai découvert depuis, comme je le montrerai plus loin, qu'il existe certains organismes dont les

germes ou spores peuvent résister pendant plus d'une heure à la température de l'eau bouillante. Comment se fait-il donc que l'urine soit restée intacte dans des tubes où l'eau n'avait bouilli que pendant un quart d'heure au plus ? Cela tient à ce que l'urine introduite était très-notablement acide et que les spores des organismes résistant à la température de 100 degrés ne se développent facilement que dans des liquides presque neutres, ou mieux légèrement alcalins. Or, il pourrait arriver que l'urine eût précisément cette réaction légèrement alcaline, bien que ne renfermant pas d'organismes. Dans ce cas, pour avoir la conservation, il faut flamber séparément à la lampe à alcool le tube à réactif, le bouchon de caoutchouc et les deux petits tubes qui le traversent. J'ai préparé ainsi, au commencement de l'année 1877, des tubes dans lesquels l'urine introduite était acide, neutre ou légèrement alcaline. Tous ces tubes se sont très-bien conservés, même après avoir été placés à l'étuve à 25 ou à 50 degrés.

Mais le flamage séparé des différentes parties d'un appareil comme celui que je viens de décrire est assez délicat, et l'on est exposé à des causes d'erreur provenant des germes répandus dans l'air. Aussi, dans ce cas, vaut-il mieux supprimer le bouchon de caoutchouc et se servir d'un tube de verre sur lequel sont soudés deux tubes plus petits *a* et *b*, comme le montre la *fig.* 8. Dans le tube *a* et à l'extrémité du tube *b* on

Fig. 8.



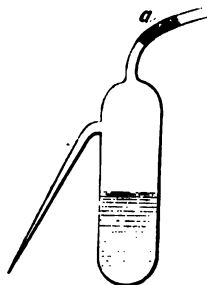
introduit un tampon de coton. On porte une série de tubes semblables dans un fourneau à gaz, à la température de 200 à 250 degrés. Lorsque le coton a pris une teinte jaunâtre, tous les germes pouvant exister dans les tubes sont tués ; on les retire, et, lorsqu'on veut introduire l'urine, on enlève le tampon de coton situé à l'extrémité du tube *b* et l'on adapte un

tube de caoutchouc sortant de l'eau acidulée bouillante, suivi d'un tube en verre creux flambé. Le reste de l'opération s'achève comme précédemment.

Ainsi, en prenant des précautions convenables, on peut avoir de l'urine acide, neutre ou légèrement alcaline, se conservant indéfiniment au contact de l'air, même à la température de 50 degrés. Je cite cette dernière température parce qu'elle est plus favorable que celle de 25 ou 30 degrés pour le développement de certains organismes, en particulier ceux dont les spores résistent à la température de 100 degrés (').

J'ai fait aussi, quoique d'une façon incidente, des expériences sur la conservation du sang au contact de l'air. Le procédé consiste à faire passer le sang du corps d'un animal dans un appareil flambé contenant de l'air pur et restant ensuite en communication avec l'air extérieur. On arrive très-facilement à ce résultat avec des tubes de verre ayant la forme indiquée par la *fig. 9*. On flambe ces tubes dans un fourneau à

Fig. 9.



gaz, après avoir mis un tampon de coton en *a*. Si l'on dispose d'un animal vivant, on met à nu une veine ou une artère dans laquelle on fait une incision et l'on introduit l'extrémité effilée *b* qu'on vient de couper et de passer dans la flamme. Le sang coule de lui-même; on peut faciliter son écoulement en aspirant avec la bouche par le tube *a*. On ferme ensuite l'effilure à la lampe.

(') Dans un travail publié au mois d'octobre 1877 dans la *Revue mensuelle de Médecine et de Chirurgie*, MM. les docteurs Paul Cazeneuve et Charles Livon ont montré que, en enlevant la vessie d'un animal, l'urine qui y est contenue, et qui se trouve ainsi constamment au contact des parois, se conserve intacte sans donner naissance au moindre organisme microscopique, que cette urine soit acide ou alcaline et quelle que soit la température.

Si l'on ne dispose pas d'un animal vivant, on prend le cœur d'un animal qui vient d'être tué, dans un abattoir par exemple, on perce la paroi à l'aide d'un scalpel flambé et l'on plonge la pointe effilée, préalablement coupée et flambée. On aspire par le tube en *a*. Ordinairement, il reste suffisamment de sang dans le cœur pour pouvoir remplir le tube à moitié. On ferme toujours l'effilure à la lampe.

On a ainsi, en contact continu avec l'air par le tube *a*, du sang normal qui se conserve indéfiniment soit à la température de 25 à 30 degrés, soit à la température de 50 degrés (¹).

Fermentation des fruits sucrés plongés dans le gaz acide carbonique.

M. Fremy crut rencontrer « une démonstration rigoureuse de l'hémiorganisme » (p. 189) dans les fermentations qu'éprouvent les fruits sucrés plongés dans le gaz acide carbonique, fermentations étudiées pour la première fois par MM. Lechartier et Bellamy, en 1869.

Voici le fait : si l'on abandonne un fruit bien mûr dans un flacon portant un tube pour laisser dégager les gaz, on constate bientôt que tout l'oxygène du flacon est absorbé, puis il se dégage de l'acide carbonique; si l'on distille le fruit, on trouve de l'alcool. C'est aux dépens du sucre que l'acide carbonique et l'alcool se sont formés. Cette fermentation, à laquelle M. Fremy donne le nom de *fermentation intracellulaire*, puisqu'elle se produit, dit-il, à l'intérieur des cellules, n'a pas lieu tant que le fruit peut absorber de l'oxygène, mais elle se manifeste dès que tout l'oxygène a été transformé en acide carbonique. On sait, en effet, que les fruits absorbent l'oxygène de l'air en dégageant un volume à peu près égal de gaz acide carbonique; aussi la fermentation intracellulaire se produit-elle immédiatement si l'on met les fruits, dès le début, dans de l'acide carbonique, comme l'a constaté M. Pasteur.

Jusqu'à-là cette expérience est parfaitement conforme à la théorie générale de la fermentation exposée par M. Pasteur dans son Ouvrage intitulé : *Études sur la bière*. Il démontre, en effet, que le caractère ferment tient à ce que certaines cellules peuvent se multiplier ou

(¹) Au laboratoire de M. Pasteur, ces procédés et ce maniement de liquides naturels sont journellement employés.

simplement *continuer à vivre* à l'abri de l'oxygène de l'air. C'est ainsi que beaucoup de moisissures peuvent jouer le rôle de ferment pendant un certain temps lorsqu'on les submerge dans un liquide sucré. Au contraire, la levûre de bière, qui est le ferment alcoolique par excellence, ne décompose qu'une très-petite quantité de sucre si on lui fournit constamment de l'oxygène pendant son développement, tandis qu'elle en décompose beaucoup si elle est privée de cet oxygène. Les cellules du fruit continuant à vivre et ne pouvant plus absorber l'oxygène de l'air, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'elles décomposent le sucre. C'est bien là la cause de la fermentation, car, si l'on broie le fruit de façon à détruire la vie des cellules, il ne se produit plus ni alcool ni acide carbonique.

Mais ce qui serait tout à fait contraire à la théorie de M. Pasteur et ce qui constituerait une démonstration de l'hémiorganisme, ce serait la présence de la levûre dans les fruits ayant ainsi fermenté, car, dans ce cas, les cellules du fruit auraient donné naissance spontanément à ces organismes. M. Fremy a annoncé à différentes reprises qu'il avait constaté la présence des cellules de levûre dans les fruits ayant ainsi fermenté. Il a opéré sur des poires, des raisins, des cerises, des groseilles, et voici sa conclusion :

« Tous ces fruits, une fois soustraits à l'influence de l'oxygène, ont éprouvé la fermentation intracellulaire; ils ont donné naissance à de l'acide carbonique et à de l'alcool; en examinant les sucs après la fermentation, j'ai toujours constaté dans ces liquides la présence de ferments organisés » (p. 184).

D'un autre côté, M. Pasteur avait été amené, comme conséquence de la théorie de la fermentation, à étudier la fermentation des fruits sucrés plongés dans le gaz acide carbonique, et jamais il ne put reconnaître la présence de cellules de levûre à l'intérieur. MM. Lechartier et Bellamy étaient arrivés au même résultat.

M. Fremy répondit :

« M. Pasteur connaît-il bien toutes les formes de ferment alcoolique? Elles changent avec les différents fruits; il en existe de presque imperceptibles qui ont à peine $\frac{1}{800}$ de millimètre de grosseur, tandis que la levûre de bière arrive à $\frac{1}{100}$ de millimètre.

« Les ferments alcooliques, étant organisés, n'arrivent pas immédia-

tués dans les milieux neutres ou légèrement alcalins à la température de 100 degrés.

Je pris donc des tubes étirés comme le montre la *fig. 10*. Après les avoir flambés à la lampe d'émailleur, je les laissais refroidir, la partie effilée

Fig. 10.



tournée vers le bas, afin d'éviter autant que possible la rentrée des poussières de l'air; puis j'introduisais une petite quantité d'eau distillée à l'aide d'un entonnoir flambé; je fermais l'effilure à la lampe et je flambais de nouveau les parois qui n'étaient pas en contact avec l'eau⁽¹⁾. Puis tous ces tubes étaient mis dans un bain de chlorure de calcium qu'on chauffait à une température comprise entre 110 et 115 degrés. Le niveau du bain dépassait le niveau de l'eau de 3 ou 4 centimètres. De cette façon, l'eau contenue dans les tubes ne devait plus contenir aucun germe vivant, et, comme les parois avaient été flambées, tout l'intérieur des tubes se trouvait privé de germes.

Pour introduire les grains, qui avaient été choisis aussi sains que possible, on faisait un trait de lime à la partie supérieure du tube et l'on découpait une petite calotte avec un charbon de Berzélius. On enlevait cette calotte tout à côté de la lampe d'émailleur, et immédiatement un aide introduisait un grain tout préparé venant d'être flambé à l'instant; puis on fermait de nouveau le tube à la lampe. Le grain intro-

(¹) On peut aussi mettre un petit tampon de coton dans l'effilure, flamber et fermer à la lampe après refroidissement.

ration avec M. Joubert, qui avait bien voulu se joindre à moi pour faire ces expériences. Nous n'avons jamais trouvé, dans nos différentes préparations, de cellules de levûre; on voit bien quelques cellules rondes, les unes très-petites, les autres grosses comme des cellules de mucor, mais elles sont peu visibles; le contour seul s'aperçoit nettement, et il n'est pas possible de les confondre avec des cellules de levûre, du moins avec toutes les levûres connues jusqu'ici. Ces cellules ont pu induire en erreur M. Fremy, mais on arrive à reconnaître que ce ne sont pas des cellules de levûre; une première preuve est fournie par ce fait qu'elles existent aussi dans les fruits qui n'ont pas subi la fermentation intracellulaire, ce qui montre qu'elles appartiennent au fruit lui-même. D'ailleurs, si l'examen microscopique peut toujours laisser un certain doute, il y a un moyen sûr de constater si, oui ou non, il y a de la levûre: c'est de mettre l'intérieur de ces fruits dans des tubes renfermant du moût de raisin bouilli. S'il y a un ferment, il se développera et fera fermenter le moût; si non, il n'y aura aucune fermentation. Mais cette expérience est délicate et elle doit être faite avec beaucoup de précautions. Les fruits portent souvent à leur surface des germes de ferment; si l'on introduit ces derniers dans le moût de raisin bouilli, il y aura fermentation, et l'on attribuera à des ferments internes ce qui est dû en réalité à des germes extérieurs. Pour éviter cette cause d'erreur, nous enlevons la pellicule avec un très-grand soin à l'aide d'une pince flambée, et nous prenons une partie du fruit à l'aide d'une cuiller d'argent également flambée. En opérant ainsi, nous n'avons pas eu une seule fois la fermentation du moût de raisin; par conséquent, il n'y avait certainement pas de cellules de levûre dans tous les fruits que nous avons examinés.

Comment se fait-il que M. Fremy soit arrivé à un résultat directement contraire? Je serais porté à croire qu'il s'est glissé une cause d'erreur dans ses expériences. Il serait assez difficile de préciser nettement cette cause d'erreur, parce que M. Fremy néglige de donner des détails qui auraient été cependant d'une grande utilité. Il ne dit nulle part qu'il ait pris des fruits bien sains cueillis sur l'arbre lui-même. Peut-être s'est-il servi de fruits achetés dans le commerce et, par conséquent, plus ou moins froissés et meurtris. De plus, ces fruits sont placés en assez grand nombre dans un flacon, d'où résulte nécessairement qu'ils pres-

sent les uns sur les autres, ce qui peut avoir pour effet de faire pénétrer à l'intérieur les germes qui existent à l'extérieur. La pellicule peut même se déchirer sous l'influence de la pression; alors l'introduction des germes est rendue beaucoup plus facile. M. Fremy dit bien, dans sa Note du 17 juillet 1876, qu'il lave les cerises avec de l'eau distillée avant de les introduire dans le flacon; mais ce lavage est tout à fait impuissant pour enlever tous les germes qui existent à la surface, car, en mettant des cerises ainsi lavées dans un flacon sortant de l'eau bouillante et les écrasant, on constate que la fermentation a lieu. Je crois que ce lavage est plutôt nuisible qu'utile, car il tend à détacher la queue du fruit et, par conséquent, à faciliter l'introduction des germes extérieurs.

Une autre cause d'erreur peut tenir à la durée pendant laquelle les fruits restent plongés dans le gaz acide carbonique. J'ai constaté effectivement que, au bout de six ou sept jours, on voyait très-nettement suinter des gouttelettes sur la pellicule. Il est évident que, si ces gouttelettes se trouvent en contact avec un germe extérieur, il y aura une fermentation qui pourra se propager dans l'intérieur. Il n'y a d'ailleurs aucun inconvénient à cesser l'expérience au bout de deux ou trois jours seulement, car la fermentation intracellulaire se produit immédiatement lorsque le fruit est plongé dans l'acide carbonique ou dans un gaz autre que l'oxygène, en particulier dans l'hydrogène (1); par conséquent, le ferment alcoolique devrait apparaître aussi immédiatement. A plus forte raison devrait-il se trouver très-développé au bout de deux ou trois jours, et surtout de quatre ou cinq.

Je pense que c'est là la principale cause d'erreur dans les expériences de M. Fremy; dans sa Note du 17 juillet 1876, il dit, en effet, qu'il a examiné les cerises contenues dans le flacon plein d'acide carbonique, environ un mois après la mise en expérience. Après ce temps, la pellicule d'un certain nombre était déchirée; par conséquent, du jus sucré s'était répandu sur les fruits et avait fermenté. Chaque cerise était pour ainsi dire enveloppée de ferment alcoolique; on conçoit

(1) Lorsque le fruit est placé dans une éprouvette contenant de l'air, on constate d'abord une absorption qui est due à la transformation de l'oxygène en acide carbonique et à l'absorption de ce gaz par le suc du fruit. La fermentation ne commence que lorsque tout l'oxygène a disparu.

n'ai-je pas réussi à obtenir des tubes de grains d'orge ordinaire ne s'altérant pas. Mais j'ai trouvé une variété d'orge où les grains se trouvent enfermés à peu près de la même façon que les grains de blé. Avec cette variété, le résultat a été identique à celui du blé : dans un grand nombre de tubes il n'y eut aucune altération.

Dans toutes les expériences précédentes, les tubes dans lesquels se trouvent les grains sont complètement fermés. J'ai opéré ainsi, afin d'éviter autant que possible les causes d'erreur provenant des germes répandus dans l'air ; mais j'ai constaté depuis que ces germes ne sont pas à redouter autant que je le pensais. J'ai pu alors répéter ces expériences d'une manière très-simple, de façon que l'air intérieur soit constamment en communication avec l'air extérieur.

On prend des tubes à essai bien propres que l'on bouche avec des tampons de coton ; on les flambe dans un fourneau à gaz. A l'aide d'une pipette flambée portant un tampon de coton à sa partie supérieure, en *a* (*fig. 11*), on aspire l'eau distillée ou l'eau sucrée ayant été portée

Fig. 11.



à la température de 110 ou 115 degrés, et l'on en introduit une petite quantité dans chacun des tubes, qu'on referme immédiatement à l'aide des tampons de coton ; puis on prend les grains dans les cosses ou sur les épis à l'aide d'une pince flambée et on les laisse tomber dans les tubes. Ces grains se conservent ainsi parfaitement dans presque tous les cas, quelle que soit la température à laquelle on les porte.

et le liquide reste sucré; dans les autres, la fermentation se produit.

Voici quelques exemples. Sur vingt-quatre tubes dans chacun desquels j'avais mis un grain de raisin, il n'y eut que trois d'entre eux qui éprouvèrent la fermentation; dans tous les autres, même après l'écrasement des grains ayant subi la fermentation intracellulaire pendant plus de quinze jours, il ne se forma que des moisissures.

Sur vingt-quatre tubes semblables contenant chacun une fraise bien mûre, il y eut fermentation dans cinq tubes seulement.

Comme, dans la théorie de M. Fremy, *tous* les tubes devraient fermenter, on est obligé de conclure que cette théorie est fausse, et qu'il est inexact de dire que dans la fermentation intracellulaire les cellules du fruit donnent naissance à du ferment alcoolique.

L'expérience précédente est, au contraire, bien facile à expliquer dans la théorie de M. Pasteur. Nous verrons, en effet, qu'il existe des germes de ferment à la surface des fruits sucrés; mais ces germes ne sont pas tellement répandus qu'ils existent nécessairement à la surface de *tous* les fruits. Si le fruit ou le grain ne porte pas de germes, la fermentation intracellulaire se produira, mais le liquide sucré dans lequel il baigne ne fermentera pas; si, au contraire, il porte des germes, il y aura à la fois fermentation intracellulaire et fermentation du liquide. Dans ce dernier cas, le liquide fermente souvent avant qu'on écrase le fruit et sans même que la pellicule soit déchirée, ce qui montre bien que les germes sont extérieurs.

On comprend la nécessité de ne mettre *qu'un seul grain* ou *un seul fruit* par tube. Si l'on en mettait plusieurs, on aurait plus de chances d'introduire des germes extérieurs dans tous les tubes, et, la fermentation se produisant dès lors constamment, notre conclusion nous échapperait.

On pourrait à la rigueur placer dans le moût sucré des fruits auxquels on aurait enlevé la pellicule extérieure, par exemple certaines pêches. Dans ce cas, la fermentation intracellulaire se produirait encore, puisque les cellules du fruit ne seraient pas déchirées, mais après l'écrasement aucun des tubes n'entrerait en fermentation.

Si M. Fremy pense que le liquide sucré a pu nuire en quoi que ce soit au développement du ferment organisé, il est facile de répéter l'ex-

M. Fremy ajoute que la fermentation du jus de raisin se comprend très-facilement de cette manière, tandis qu'elle devient inexplicable dans la théorie de M. Pasteur.

Introduisons au moment des vendanges, c'est-à-dire au moment le plus favorable pour la fermentation, des grains de raisin bien mûrs dans une série de tubes flambés fermés par un tampon de coton, comme ceux que j'ai décrits tout à l'heure, en ayant soin de ne mettre qu'un seul grain par tube et de prendre ces grains sur des grappes saines, en laissant à chaque grain le plus petit fragment de grappe possible; écrasons les grains avec des agitateurs flambés. Voici ce que l'on constate :

Dans un grand nombre de tubes, souvent plus des trois quarts, il ne se produit aucune fermentation. Ce fait, découvert par M. Pasteur, est impossible à expliquer dans la théorie de l'hémiorganisme, car la matière hémiorganisée est la même pour tous les grains de raisin et elle est placée dans des conditions identiques; par conséquent, *tous* les tubes devraient entrer en fermentation, ce qui n'a jamais lieu.

M. Pasteur a voulu aller plus loin. Au moyen d'une disposition très-ingénieuse, il a pris une goutte de liquide à l'intérieur d'un grain, et, en mélangeant cette goutte à du moût de raisin bouilli, il a montré qu'il n'y avait *jamais* fermentation. Mais, outre que cette expérience est fort délicate, on pourrait dire que dans la goutte prise par M. Pasteur ne se trouvent pas les cellules devant engendrer le ferment; par exemple, on aurait pu soutenir que ce sont les cellules placées immédiatement au-dessous de la pellicule qui produisent le ferment; or ces cellules, d'après la disposition adoptée par M. Pasteur, peuvent ne pas exister dans la goutte puisée à l'intérieur du grain. M. Fremy a essayé de prouver aussi que les petites quantités ne fermentent pas, ce qui est inexact, comme l'a montré M. Pasteur; il vaut mieux éviter toutes ces objections qui entraînent beaucoup trop loin, et, sous ce rapport, l'expérience précédente est tout à fait concluante.

D'ailleurs, en se servant des raisins ne portant pas de germes dont j'ai déjà parlé, on peut écraser des raisins entiers dans des appareils privés de germes et il ne se produit jamais de fermentation, ce qui montre bien le peu de fondement de la théorie de l'hémiorganisme.

M. Fremy trouve aussi que de tous les éléments du grain de raisin le suc trouble est celui qui fermente avec le plus de rapidité, que, après plusieurs filtrations, le moût perd ses facultés fermentescibles à mesure qu'il devient plus limpide, et qu'un suc absolument clair peut être conservé beaucoup plus longtemps sans éprouver de fermentation qu'un moût trouble. Cependant le moût clair n'a pas perdu la propriété de fermenter.

« Pourquoi le suc de raisin éclairci par des filtrations répétées au contact de l'air, et saturé par conséquent de germes atmosphériques, fermente-t-il beaucoup plus difficilement que le suc trouble qui sort des grains de raisin » (p. 164) ?

La réponse est bien simple. Le moût trouble, tel qu'on l'obtient en comprimant des grains écrasés dans un linge, fermente avec la plus grande facilité parce qu'il contient presque tous les germes qui existaient à la surface des grains et de la grappe; lorsqu'on filtre, ce suc, au contraire, une grande partie des germes reste sur le filtre où il se forme un dépôt de substance albumineuse qui bouche les pores; à chaque filtration, une certaine quantité des germes est ainsi enlevée et, par suite, le moût clair doit fermenter moins rapidement. Quant à l'objection tirée de ce que le moût clair, ayant filtré pendant plusieurs heures, devrait être saturé de germes atmosphériques, elle est sans valeur depuis que nous savons que les germes de ferment alcoolique sont en réalité peu abondants dans l'air. C'est surtout, et presque exclusivement, par les germes qui existent à la surface de la grappe ou du grain que le moût de raisin entre en fermentation.

Arrivons maintenant à l'expérience de Gay-Lussac qui, d'après M. Fremy, « constitue certainement une des objections les plus graves que l'on puisse opposer aux théories de M. Pasteur » (p. 168).

Gay-Lussac écrase des grains de raisin dans une éprouvette pleine de mercure, après les avoir lavés avec du gaz hydrogène pour chasser, autant que possible, l'air adhérent aux grains et aux parois de l'éprouvette. La fermentation ne se produit pas. Au bout de plusieurs semaines, Gay-Lussac fait passer quelques bulles d'oxygène dans l'éprouvette, et la fermentation commence les jours suivants. Il en conclut que « la

fermentation du moût de raisin ne peut commencer sans le secours du gaz oxygène » (1).

L'expérience de Gay-Lussac est parfaitement exacte. Les grains de raisin ainsi écrasés peuvent être conservés indéfiniment sans manifester le moindre signe de fermentation, mais celle-ci se produit généralement si l'on introduit d'une manière quelconque quelques centimètres cubes de gaz oxygène. M. Fremy interprète ce résultat en disant que l'oxygène a permis à la matière albuminoïde du grain de raisin de s'organiser et de produire des cellules de ferment alcoolique.

M. Pasteur, au commencement de ses études sur les fermentations, pensait que l'introduction de l'air avait eu nécessairement pour effet d'amener des germes au contact des grains écrasés, et, suivant lui, ces germes devaient se trouver, soit dans la petite quantité d'air introduite, soit dans le mercure, soit enfin sur les parois de l'éprouvette. Mais nous savons maintenant que les germes de ferment alcoolique sont peu répandus dans l'air; nous ne pouvons donc pas admettre qu'il y en ait eu souvent dans les 2 ou 3 centimètres cubes d'oxygène introduits. D'ailleurs, M. Fremy a dégagé directement l'oxygène au moyen de la pile au sommet de l'éprouvette, et la fermentation a eu lieu. L'hypothèse d'après laquelle les germes se trouveraient dans le mercure ou sur les parois de l'éprouvette est possible; il est certain que, dans un laboratoire où l'on travaille constamment sur les fermentations, il y a des germes dans la cuve à mercure, il peut y en avoir aussi sur les parois de l'éprouvette, mais ce n'est pas là toujours la véritable cause de la fermentation. En effet, on peut préalablement flamber l'éprouvette, chauffer le mercure à une température suffisante pour tuer tous les germes, faire passer ensuite de l'oxygène exempt de germes, et cependant la fermentation se produira encore. Les différentes causes indiquées autrefois par M. Pasteur pouvaient donc être des causes accidentelles, mais n'étaient assurément pas la cause essentielle. Ce n'est que depuis quelques années, depuis qu'il a découvert l'existence des germes à la surface des grains de raisin, et surtout depuis qu'il a établi la véritable théorie de la fer-

(1) GAY-LUSSAC, *Annales de Chimie*, t. LXXVI, p. 245.

mentation, que M. Pasteur a pu donner la cause exacte du fait observé par Gay-Lussac.

M. Pasteur, dans ses *Études sur la bière*, montre que les *vieilles cellules* de levûre ne peuvent se rajeunir et jouer leur rôle de ferment qu'autant que les milieux sucrés dans lesquels on les place contiennent de l'oxygène en dissolution. Si le milieu sucré est privé d'oxygène, la levûre reste inerte. Or, les germes qui existent à la surface des grains de raisin sont précisément dans un état comparable à celui des cellules vieilles dont je viens de parler; par conséquent ils restent stériles lors même qu'ils sont en contact avec le moût de raisin. Ils ne peuvent bourgeonner et produire la fermentation que lorsqu'on a introduit de l'oxygène.

Au lieu de mettre plusieurs grains dans une éprouvette pleine de mercure comme le fait Gay-Lussac, mettons *un seul grain* de raisin et écrasons-le. Préparons ainsi vingt éprouvettes, par exemple, et, après avoir constaté que la fermentation n'a pas lieu, faisons passer dans toutes, avec les précautions nécessaires, quelques centimètres cubes d'oxygène. Nous observerons que quelques éprouvettes, quatre ou cinq peut-être, entreront en fermentation, mais toutes les autres resteront dans le même état que si l'on n'avait pas fait passer d'oxygène ('). Le nombre des éprouvettes qui fermenteront pourra varier, mais dans toutes les séries d'expériences il y aura toujours des éprouvettes ne fermentant pas.

Il est impossible d'expliquer ce résultat dans la théorie de l'hémi-organisme. La matière albuminoïde du grain de raisin au contact de l'oxygène ne saurait produire de la levûre dans quelques cas seulement, puisque les conditions sont exactement les mêmes.

Avec M. Pasteur, au contraire, l'explication est très-simple. Les germes sont inégalement répandus sur les grains de raisin, et un certain nombre d'entre eux n'en portent pas. Ces derniers ne doivent donc pas fermenter, lors même qu'ils se trouvent en présence de l'oxygène. En se servant de raisins qui ne portent pas de germes et qu'il est facile

(') Je ne parle pas des moisissures qui pourront se développer; elles n'ont rien de commun avec le ferment alcoolique.

de se procurer, la fermentation ne se produirait dans aucun cas, ce qui est exactement le contraire de l'expérience de Gay-Lussac. Je ferai remarquer d'ailleurs que Gay-Lussac fit deux expériences et qu'il n'y eut fermentation que dans un cas.

A propos de l'expérience de Gay-Lussac, je trouve les assertions suivantes :

1° Du suc de raisin filtré à l'air, introduit dans des tubes bouchés et renversés sur la cuve à mercure, n'entre pas en fermentation.

2° Ce suc fermente si l'on introduit dans le tube une petite quantité d'oxygène.

3° Les résultats sont les mêmes si l'on opère avec du moût trouble, tel qu'on l'obtient en pressant la grappe dans un linge.

« Tous ces faits, ajoute M. Fremy, démontrent clairement que la génération des ferments est due à la vitalité des liquides organiques, entretenue par l'oxygène, et nullement à l'influence des prétendus germes atmosphériques de ferments » (p. 176).

Voici quelques expériences contradictoires :

Le 20 novembre 1876, des raisins bien conservés sont écrasés et comprimés dans un linge. Le jus trouble obtenu est mis dans deux tubes flambés et renversés ensuite sur le mercure. Au bout de deux jours, ces deux tubes fermentent activement par la levûre apiculée.

Le même jour, une autre partie du moût trouble ayant été filtrée, le liquide clair obtenu a été mis dans quatre tubes flambés qui ont été aussi renversés sur le mercure. Les jours suivants, il ne se déclare aucune fermentation ; il se précipite seulement dans le liquide une matière brunâtre et mucilagineuse. Cependant, vers le 8 décembre, on voit une quantité notable de gaz au haut de deux des tubes ; la fermentation a donc commencé, mais seulement quinze jours environ après la mise en expérience. De plus, le dégagement du gaz est très-lent. Le 14 décembre, un des tubes est presque rempli d'acide carbonique ; la levûre, examinée au microscope, montre des cellules ovales un peu allongées, remplies de granulations intérieures ; les parois sont épaissies comme dans les vieilles cellules de levûre ; on ne rencontre que très-peu de cellules jeunes, à protoplasma transparent. Le second tube

fermente encore plus lentement. Le 20 décembre, il n'y a encore que 7 ou 8 centimètres cubes de gaz dégagé ; la levûre, examinée ce jour-là, est semblable à la précédente.

Quant aux deux autres tubes, ils n'ont pas donné de fermentation.

Il faut conclure de cette expérience : 1° qu'il n'est pas exact de dire que des tubes de moût trouble placés sur le mercure n'entrent jamais en fermentation ; 2° que le moût clair, placé dans des tubes sur le mercure, peut aussi fermenter, quoique moins activement.

L'explication de ces résultats est d'ailleurs facile.

Le moût trouble renferme beaucoup de germes et contient de l'oxygène en dissolution ; les germes peuvent donc bourgeonner rapidement, et, comme les cellules nouvelles ont été formées sous l'influence de l'oxygène, elles ont une grande vitalité et décomposent le sucre rapidement.

Dans le moût filtré, les germes sont en quantité beaucoup plus petite ; il y a donc moins de probabilité pour qu'il se trouve des cellules-germes très-actives. Alors, une partie de l'oxygène dissous se combine au moût pour l'oxyder et probablement donner naissance à cette matière brunâtre qui se dépose assez vite. Les bourgeons issus des cellules-germes, ayant été formés sous l'influence d'une petite quantité d'oxygène, ont peu de vitalité, et, par suite, la décomposition du sucre est très-lente : c'est ce qui a eu lieu pour deux des tubes.

Il peut même se faire que tout l'oxygène dissous disparaisse par oxydation du moût avant que le bourgeonnement soit possible ; dès lors, aucune fermentation ne peut se manifester : c'est ce qui a eu lieu pour les deux autres tubes.

Si ce raisonnement est exact, le nombre des tubes qui éprouvent la fermentation doit diminuer lorsque le moût a été obtenu avec des raisins conservés pendant très-longtemps, car on sait que la quantité des germes féconds qui existent sur les raisins diminue avec le temps.

C'est ce que l'expérience m'a montré d'une façon très-nette, en me servant de moût préparé avec des raisins blancs très-bien conservés, par la méthode de Thommery, depuis la dernière récolte jusqu'à la fin

du mois de janvier. Avec ce moût j'ai fait dix tubes que j'ai placés sur le mercure, savoir :

- 2 de moût trouble saturé d'air, et 2 du même moût non saturé;
- 3 de moût clair saturé d'air, et 3 du même moût non saturé.

La fermentation eut lieu dans les deux tubes de moût trouble saturé d'air, dans un tube du même moût non saturé et dans un tube de moût clair non saturé, mais dans ce dernier il n'y eut qu'un commencement de fermentation; il ne se dégagait que 4 ou 5 centimètres cubes de gaz acide carbonique, après quoi le volume resta stationnaire.

En résumé, le fait que du moût de raisin trouble ou filtré mis dans des tubes placés sur le mercure ne fermente pas n'est donc pas rigoureusement exact. Les résultats varient et s'expliquent par les conditions des expériences, et même, d'après ce qu'on vient de voir, si l'on se servait de raisins pris à la vigne au moment des vendanges, c'est-à-dire au moment où il y a le plus de germes féconds, il est probable qu'on aurait dans presque tous les cas la fermentation avec le moût trouble et le plus souvent avec le moût clair.

Un autre résultat de mes expériences est plus net encore. M. Frey dit que, lorsque du moût de raisin placé dans un tube sur le mercure n'a pas fermenté, l'introduction d'une petite quantité d'oxygène provoque la fermentation au bout de quelques jours; cet oxygène permet à la matière hémiorganisée du moût de raisin de donner naissance aux cellules de levûre. Comment expliquer alors qu'il y ait des cas où la présence de l'oxygène ne produise aucun effet? Voici des exemples :

Le 4 janvier, je fais passer, avec les précautions convenables, 3 ou 4 centimètres cubes d'air dans un tube de moût de raisin filtré placé sur le mercure depuis le 20 décembre et qui n'avait donné aucune fermentation. Les jours suivants, le volume du gaz ne varie pas, et pendant plusieurs mois les choses sont restées dans le même état.

Le 10 mars, je fais de même passer quelques centimètres cubes d'air dans quatre tubes de moût de raisin. Trois avaient été préparés le 20 décembre et le quatrième le 7 décembre. Aucun de ces tubes n'a fermenté.

La présence de l'oxygène ne suffit donc pas dans tous les cas pour produire la fermentation.

Il peut même arriver que l'introduction de l'air produise un commencement de fermentation qui s'arrête ensuite. C'est ce que j'ai observé dans deux cas.

Le 1^{er} décembre, je fais passer 3 ou 4 centimètres cubes d'air dans un tube de moût placé sur le mercure depuis le 11 novembre. Au bout de trois ou quatre jours, le volume du gaz a sensiblement doublé ; mais à partir de ce moment il est resté invariable. L'examen microscopique de ce tube, qui a eu lieu le 4 janvier, montre des cellules petites et ovales de levûre vieillie.

Le 27 février, j'ai répété la même expérience sur un tube de moût filtré du 29 janvier. Il y eut aussi un commencement de fermentation qui s'arrêta au bout de quatre ou cinq jours. La levûre était analogue à la précédente.

Ces différents résultats sont incompatibles avec la théorie de l'hémi-organisme, tandis qu'ils se comprennent très-bien dans la théorie des germes. Les différentes quantités d'un même moût peuvent en effet, après leur filtration, renfermer des germes en quantité variable, en être privées complètement ou ne renfermer que des germes inféconds. Dans ce dernier cas, la présence de l'oxygène ne pourra jamais provoquer la fermentation.

Fermentation du lait.

Les études faites par M. Fremy sur la fermentation du lait l'ont conduit à opposer à la théorie de M. Pasteur les arguments suivants (p. 152) :

« 1^o Le lait, soumis à la température qui tue tous les ferments, éprouve encore plusieurs espèces de fermentations.

» 2^o Le lait qui sort du pis de la vache et qui tombe dans un flacon contenant de l'air privé de germes fermente toujours.

» 3^o En faisant varier la réaction du lait, en le rendant neutre, alcalin ou acide, on peut lui faire éprouver à volonté des fermentations différentes.

» Tous ces faits me paraissent inexplicables dans la théorie de M. Pasteur et confirment, au contraire, les idées que j'ai émises sur la génération des ferments par les liquides organiques vivants. »

Examinons chacune de ces affirmations.

« 1° Le lait, soumis à la température *qui tue tous les ferments*, éprouve encore plusieurs espèces de fermentations. »

Si ce fait était prouvé, il serait suffisant pour renverser la théorie de M. Pasteur, car on aurait un exemple d'un liquide organique donnant naissance spontanément à des ferments sans qu'il y ait de germes préexistants.

Le point délicat est de savoir si, dans ses expériences, M. Fremy a atteint réellement la température *qui tue tous les ferments*. Son expérience consiste à faire bouillir du lait pendant quelques instants, en prenant les précautions nécessaires pour empêcher l'introduction des germes par la rentrée de l'air. Il constate néanmoins que le liquide s'altère. Ce fait n'est pas nouveau ; il avait été annoncé dès 1862 par M. Pasteur. Seulement M. Pasteur, loin d'en tirer les mêmes conclusions, l'explique en disant que l'ébullition du lait est insuffisante pour tuer les germes qui y existent, tandis que M. Fremy admet que cette ébullition suffit. « Je n'admets pas, dit-il, qu'un organisme albumineux puisse rester vivant dans l'eau bouillante » (p. 151). Mais on ne trouve nulle part de preuves de cette affirmation. M. Fremy a bien constaté que l'albumine en dissolution dans l'eau est coagulée et tuée au-dessous de 100 degrés, mais peut-on comparer l'albumine *en dissolution dans l'eau* avec des germes d'organismes qui échappent à notre investigation ?

M. Pasteur avait démontré que l'ébullition du lait est insuffisante pour tuer les germes qu'il peut renfermer en portant ce liquide à une température plus élevée, à 110 degrés par exemple ; dans ce cas, il n'y a plus d'altération. On constate une faible oxydation directe de la matière grasse, mais jamais on ne voit apparaître d'organismes microscopiques. Ainsi le lait, porté à la température d'environ 100 degrés, s'altère en donnant naissance à des organismes microscopiques ; mais, si la température est portée à 110 degrés, il n'y a plus d'altération.

M. Fremy interprète ce résultat en disant que, par l'effet d'une température de 110 degrés, le caséum du lait a été tué, tandis qu'il ne l'é-

tait pas par une ébullition de quelques instants à 100 degrés. Or, pour M. Fremy, c'est précisément ce caséum qui, continuant à vivre, donne naissance aux organismes qui se développent dans le lait bouilli. Cette interprétation pourrait être admise jusqu'à un certain point si les expériences de M. Pasteur n'avaient porté que sur le lait ; mais il a démontré que le fait de l'altération après l'ébullition n'était pas particulier au lait, et qu'il avait lieu pour les liquides qui, comme le lait, ont une réaction légèrement alcaline au moment de l'ébullition. Pour cela, il ajoute du carbonate de chaux à de l'eau de levûre acide ; il a ainsi un liquide sensiblement neutre, et dans ce cas l'ébullition pendant quelques minutes ne suffit plus pour le stériliser, tandis qu'elle suffisait avant l'addition du carbonate de chaux. On ne peut pas dire que les germes ont été apportés par le carbonate de chaux, car on peut préalablement le porter à la chaleur rouge, et l'altération a lieu de la même façon. Pour stériliser le mélange d'eau de levûre et de carbonate de chaux, il faut le porter à la température de 110 degrés environ.

Dans ce cas particulier, il n'y a plus de caséum ; la matière albuminoïde est restée la même dans les deux expériences ; et cependant, dans un cas, lorsque le liquide est acide, les germes sont tués, dans l'autre, lorsque le liquide est légèrement alcalin, ils ne le sont plus par une même ébullition de quelques instants. Il faut donc bien admettre que les germes ont résisté à la température de 100 degrés par ce seul fait qu'ils se trouvaient dans un milieu neutre ou légèrement alcalin. Nous verrons d'ailleurs, à la fin de ce travail, que tous les liquides neutres ou alcalins se comportent de même, et que l'eau en particulier renferme souvent encore des germes actifs, même après qu'elle a été portée pendant plus d'une heure à la température de 100 degrés. Il est donc inexact de dire que la température de 100 degrés tue tous les ferments.

Voyons maintenant la deuxième affirmation.

« 2° Le lait qui sort du pis de la vache et qui tombe dans un flacon contenant de l'air privé de germes fermente toujours. »

Je dois faire remarquer d'abord que, lors même que ce fait serait vrai, il n'infirmerait en rien la théorie de M. Pasteur, car il serait pos-

sible que des organismes extérieurs pénétrassent plus ou moins profondément dans le pis de la vache et fussent entraînés avec le lait que l'on recueille. Mais M. Pasteur, après avoir constaté que le sang et l'urine d'un animal sain sont exempts d'organismes, avait été amené à conclure qu'il devait en être de même pour le lait; aussi avait-il annoncé que du lait extrait directement du pis de la vache et recueilli dans un vase privé de germes *devait* se conserver indéfiniment sans la moindre production d'organismes microscopiques. M. Pasteur fit même plusieurs essais, mais il n'eut pas le temps de les continuer.

Voici les expériences de M. Fremy (p. 146) :

« Cinq ballons de verre à col effilé ont été nettoyés avec le plus grand soin; j'ai introduit dans leur intérieur une petite quantité d'eau qui a été portée à l'ébullition; j'ai fermé ensuite à la lampe le col effilé des ballons; j'avais donc ainsi à ma disposition des ballons de verre ne contenant plus intérieurement de germes atmosphériques.

» Ces ballons ont été transportés dans une étable; j'ai entouré la pointe des ballons d'une grande quantité de coton, destiné à arrêter les poussières de l'air qui pouvaient rentrer dans les ballons, au moment de leur ouverture; j'ai ensuite brisé la pointe des ballons qui se sont remplis d'air privé de germes. J'ai introduit dans ces ballons le lait sortant du pis de la vache; les ballons ont été ensuite fermés avec soin, puis conservés dans mon laboratoire à la température de 20 degrés environ.

» Au bout de quelques jours, la fermentation s'est produite dans tous ces ballons; le caséum s'est d'abord coagulé; le liquide est devenu ensuite fortement acide; il contenait de l'acide lactique et de l'acide butyrique. Sur les cinq ballons préparés, trois ont fait explosion à la suite de la quantité considérable de gaz que le lait avait dégagé. »

M. Fremy conclut de là que c'est le développement organique du caséum qui a produit les différents ferments.

Cette expérience semble rigoureuse au premier abord, et l'on est tenté de tirer la même conclusion.

Et cependant il y a une cause d'erreur considérable, qui est telle, qu'il n'était pas possible d'obtenir du lait se conservant sans production d'organismes par cette méthode. Nous verrons, en effet, que l'ébullition

de l'eau dans des ballons, même pendant une heure, ne suffit pas le plus souvent à priver ces ballons de germes. Or, M. Fremy a fait bouillir l'eau pendant quelques instants seulement; les ballons n'étaient donc pas privés de germes, et ce sont ces derniers qui se sont surtout développés dans le lait.

Pour démontrer ce fait, j'ai pris des tubes un peu étirés et recourbés, comme le montre la *fig. 12*; j'ai placé à l'extrémité de chacun d'eux

Fig. 12.



un tampon de coton et je les ai flambés dans un fourneau à gaz. Les tubes sont retirés lorsque le coton a pris une teinte jaunâtre; tous les germes sont alors détruits. Après refroidissement, j'ai enlevé le tampon de coton, flambé à la lampe à alcool la pointe étirée et introduit le lait directement, en approchant la pointe aussi près que possible du pis. Le tube est incliné vers le bas jusqu'au moment de recevoir le lait, afin d'éviter la chute des poussières de l'air. On ferme ensuite les tubes à la lampe et on les porte à l'étuve à 25 degrés.

Généralement, au bout d'une huitaine de jours, on s'aperçoit que le lait est altéré dans quelques tubes; le liquide est séparé en deux couches, la couche inférieure blanche et la couche supérieure incolore. En ouvrant ces tubes, je n'ai jamais constaté de dégagement de gaz, mais le lait est devenu acide; au microscope, on voit des bâtonnets immobiles et souvent aussi du ferment lactique. Au goût, le lait est manifestement altéré. Mais dans beaucoup d'autres

tubes (9 sur 12 dans une de mes expériences) le lait reste tout à fait intact et fluide comme lorsqu'il vient d'être trait; il est très-légèrement alcalin au papier de tournesol, bon au goût, et au microscope on ne peut constater la présence d'aucun organisme. J'ai gardé ainsi du lait *pendant plusieurs mois* sans voir apparaître le moindre organisme microscopique. Plusieurs savants attachés au laboratoire de M. Pasteur, et M. Pasteur lui-même, ont examiné ce lait à différentes reprises et l'ont trouvé très-bien conservé.

Ces expériences ont été faites surtout avec des chèvres qu'on amenait au laboratoire, de manière à éviter les germes qui existent dans les étables. Il était aussi plus facile de prendre toutes les petites précautions pour ainsi dire indispensables à la réussite d'expériences aussi délicates. La chèvre a, d'ailleurs, d'autres avantages sur la vache : le pis est lisse, de sorte que les poussières et les saletés qui doivent pulvuler d'organismes sur le pis de la vache n'existent pas, ou presque pas, sur celui de la chèvre; enfin, le canal du pis étant ordinairement très-étroit chez les chèvres, on a moins de chances pour que les organismes extérieurs puissent y pénétrer. Pour plus de sûreté, il est bon de rejeter les premières portions de lait.

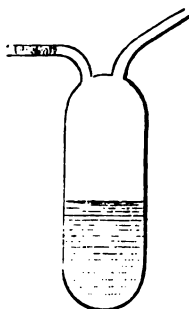
Malgré toutes ces précautions, il y a presque toujours quelques tubes qui s'altèrent. La cause doit en être attribuée aux germes qui existent dans l'air, sur le pis, les poils de l'animal, etc.

Les tubes dont je viens de parler avaient été fermés à la lampe aussitôt après l'introduction du lait; par conséquent, le liquide se trouvait en présence d'une quantité d'air limitée. On pourrait objecter, comme l'a fait M. Fremy pour le sang et l'urine, que l'oxygène est rapidement absorbé et que, dès lors, les organismes microscopiques ne peuvent plus prendre naissance. Je pourrais répondre à mon tour qu'on ne comprend plus alors comment il se fait que tous les tubes qui renferment les mêmes quantités d'air et de liquide ne se conservent pas ou ne s'altèrent pas ensemble. Pourquoi la conservation dans certains cas et l'altération dans d'autres? Enfin, pourquoi y a-t-il toujours altération lorsqu'on met du lait, sans précautions particulières, en présence d'une très-petite quantité d'air?

Pour mieux porter la conviction dans l'esprit de ceux qui pourraient conserver des doutes, j'ai ajouté au tube devant recevoir le lait un

petit tube de verre recourbé (*fig. 13*) renfermant un tampon de coton roussi, de telle façon que, par l'intermédiaire de ce tube, il y avait constamment communication entre l'air du tube et l'air extérieur. Les résultats ont été absolument les mêmes qu'avec les tubes fermés. Il serait même facile d'imaginer un dispositif permettant de faire passer un courant d'air pur continu dans le tube, comme je l'ai fait pour l'urine. La conclusion ne saurait être douteuse.

Fig. 13.



Ainsi M. Pasteur avait parfaitement raison. Le lait sortant du pis de la vache et recueilli dans un vase privé de germes se conserve indéfiniment au contact d'un air pur. Si jusqu'ici on n'était pas arrivé à ce résultat, il faut surtout en attribuer la cause à ce que les vases dans lesquels on recueillait le lait n'étaient pas complètement privés de germes, l'ébullition de l'eau dans un ballon pendant quelques instants ne suffisant pas pour tuer tous les germes qui y existent (').

Je viens de dire que par cette méthode il y a toujours quelques tubes qui s'altèrent. J'ai cherché à modifier l'expérience de façon à avoir pour ainsi dire sûrement des tubes de lait se conservant indéfiniment.

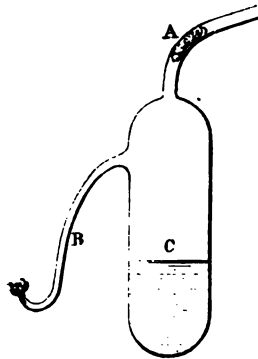
J'avais pensé arriver à ce résultat en allant chercher le lait dans le pis lui-même, de façon qu'il n'ait pas du tout le contact des poussières de l'air.

Pour cela, j'ai préparé des tubes à peu près analogues à ceux dont j'ai parlé pour la conservation du sang; ils sont représentés par la *fig. 14*;

(') J'ai lu récemment que le D^r Lister était aussi parvenu à conserver du lait naturel en le recueillant dans des vases flambés.

le petit tube A renferme un tampon de coton, et l'extrémité effilée et recourbée du tube B est coiffée aussi d'un tampon de coton. On flambe ces tubes dans le fourneau à gaz. Au moment de s'en servir, on enlève la coiffe de coton et l'on introduit l'extrémité recourbée dans le pis; on aspire par le tube A, à l'aide d'un tuyau de caoutchouc; le lait arrive alors en C. On retire la pointe, on chasse le lait restant dans le tube et l'on ferme ce dernier à la lampe. Les tubes sont ensuite portés à l'étuve.

Fig. 14.



Je dois dire que la proportion des tubes s'altérant n'a pas été plus faible que par l'autre méthode. Cela tient probablement à ce que, au moment de l'introduction du tube effilé dans le pis, il y a toujours un petit tâtonnement, de sorte que l'orifice se trouve plus ou moins en contact avec les parties extérieures du pis sur lequel se trouvent des germes qui peuvent pénétrer dans le petit tube et être entraînés avec le lait. De plus, le canal du pis doit être assez large pour pouvoir introduire le tube de verre; cette condition est défavorable, parce que les organismes peuvent alors y pénétrer beaucoup plus facilement (').

Quoi qu'il en soit, par une méthode ou par une autre, on a toujours un certain nombre de tubes dans lesquels le lait naturel reste parfaitement intact en présence d'un air pur. Cela suffit pour démontrer que

(') Je pense que le meilleur procédé consisterait à recueillir le lait d'une vache venant d'être abattue; pour cela on couperait le pis avec un scalpel flambé, et l'on aspirerait le liquide dans des tubes analogues à ceux que j'ai décrits pour la conservation du sang.

les organismes qui se développent dans le lait ne sont pas produits par le liquide lui-même.

J'arrive enfin à la troisième objection de M. Fremy, savoir :

« 3° En faisant varier la réaction du lait, en le rendant neutre, alcalin ou acide, on peut lui faire éprouver à volonté des fermentations différentes. »

Je m'empresse d'ajouter que je suis tout à fait d'accord avec M. Fremy sur ce point particulier. Aussi je ne comprends pas en quoi ce fait est inexplicable dans la théorie de M. Pasteur. M. Pasteur n'a jamais dit que, quelle que soit la réaction d'un liquide, et par conséquent quelle que soit sa composition, les organismes qui y prendront naissance seront toujours les mêmes. Certains organismes se développent surtout dans les liquides alcalins, d'autres dans des liquides neutres, d'autres enfin dans des liquides acides; par conséquent, lors même qu'un liquide renfermerait les germes de tous les organismes, il n'y aurait jamais qu'un petit nombre d'entre eux qui se développeraient : c'est ainsi, par exemple, que les petites bactéries mobiles qui pullulent si rapidement dans les liquides légèrement alcalins n'apparaissent jamais dans le moût de raisin, qui est fortement acide. C'est se tromper grandement que de penser qu'un organisme quelconque puisse se développer dans un liquide organique également quelconque.

**Expériences qui établissent la présence dans l'air des germes
des différents organismes microscopiques.**

La théorie de M. Pasteur implique la nécessité de démontrer qu'il y a, dans les particules solides en suspension dans l'air, quelque chose donnant naissance aux différents organismes qui se développent dans les liquides ou infusions organiques. Cette démonstration a été faite par M. Pasteur depuis longtemps. En effet, dans son Mémoire de 1862 déjà cité, M. Pasteur reconnaît d'abord qu'il y a dans l'air des corpuscules qui ont toutes les apparences de ferments organisés. Pour les isoler, il suffit de faire passer un courant d'air sur une bourre de coton nitrique, puis de dissoudre ce coton dans un mélange d'alcool et d'éther. Le dépôt, lavé et décanté plusieurs fois, montre alors, outre des cristaux de différentes espèces et des cellules d'amidon qu'il est facile de recon-

naitre par la teinture d'iode, d'autres corpuscules de formes variables ayant toutes les apparences de corpuscules organisés. Les uns sont sphériques, les autres ovoïdes, avec des contours plus ou moins nettement accusés. Parmi ces corpuscules se trouvent des spores de moisissures, et ce que M. Pasteur appelle les *germes de ferments*. Mais est-il possible de dire que telle cellule est un germe de ferment alcoolique, ou un germe de torula, ou même une spore de moisissure? M. Pasteur ne le pense pas. On connaît si peu la forme des germes des différents organismes, qu'il est impossible à l'observateur même le plus habile de dire avec certitude: Ceci ou cela est le germe de tel ou tel ferment, ceci est une spore et une spore de telle ou telle moisissure. Il est déjà si difficile de reconnaître, par un simple examen microscopique, les différents organismes pendant leur développement, qu'on comprend l'incertitude qui doit exister sur leurs germes, dont beaucoup, d'ailleurs, sont encore complètement inconnus. Tout ce que nous pouvons dire sur la foi de cette expérience, c'est qu'il existe dans les poussières de l'air des corpuscules qui ont tout à fait l'apparence de corps organisés.

Comment acquérir la certitude que dans ces poussières se trouvent vraiment les germes des différents ferments? Il n'y a qu'un seul moyen: introduire ces poussières dans des liquides stériles convenablement appropriés. La première question à résoudre est donc d'obtenir des liquides inaltérables. On ne peut pas songer aux liquides naturels, car, le plus souvent, ils sont très-difficiles à obtenir tout à fait exempts de germes. Il faut donc stériliser des liquides par l'action de la chaleur. Deux cas peuvent se présenter:

1° Le liquide est notablement acide, comme, par exemple, le moût de raisin, l'eau de levûre, l'urine, etc.; dans ce cas, l'ébullition directe pendant quelques instants suffit, à la condition de laisser rentrer de l'air pur;

2° Le liquide est peu acide ou légèrement alcalin; alors, le plus souvent, l'ébullition pendant quelques instants ne suffit plus; il faut ou bien prolonger l'ébullition pendant très-longtemps, ou mieux porter ces liquides pendant un court espace de temps à la température de 110 à 115 degrés. M. Pasteur a atteint ce résultat en faisant bouillir les liquides sous une pression convenable; il est plus simple

de les mettre en vase scellé que l'on plonge dans un bain de chlorure de calcium dont on élève progressivement la température.

Pour introduire les poussières de l'air dans ces liquides, il y a également deux méthodes : recueillir d'abord les poussières sur une bourre d'amianté ou de coton et mettre cette bourre dans le liquide altérable, ou bien placer simplement le liquide au contact de l'air (1). Ces diverses méthodes ont été employées avec un plein succès par M. Pasteur, soit en 1862, soit ultérieurement. Dans tous les cas, et avec tous les liquides sur lesquels il a opéré, il s'est produit des organismes : moisissures, bactéries, vibrions, ferment de l'urée, ferment lactique, etc.

Les partisans de l'hémiorganisme pourraient objecter que le simple contact de l'air, indépendamment des poussières qu'il contient, est suffisant pour produire des organismes. Mais il est facile, et j'ai répété souvent cette expérience, de faire passer un courant d'air continu dans l'appareil en prenant la précaution d'arrêter les poussières solides à l'aide d'un tube de coton roussi (2); alors il n'y a plus aucune altération. C'est donc dans les poussières solides existant en suspension dans l'atmosphère qu'il faut placer l'origine des ferments ou autres organismes qui se développent dans les infusions mises au contact de l'air. Or, on ne peut pas admettre que la vie soit provoquée par des particules minérales; il y a donc dans l'air des corpuscules organisés vivants qui, placés dans des milieux convenables, donnent naissance aux différents ferments. Ce sont ces corpuscules organisés qu'on désigne sous le nom général de *germes*, et ce sont ces germes que le microscope nous montrait tout à l'heure.

On ne comprend guère, quand on considère la facilité avec laquelle

(1) Il y a encore une troisième méthode, qui consiste à faire bouillir les liquides dans des ballons effilés qu'on ferme à la lampe pendant l'ébullition. Après refroidissement, un vide partiel existe dans le ballon. On se transporte dans l'endroit où l'on veut constater la présence des germes, on casse la pointe : l'air pénètre dans le ballon; on referme la pointe et l'on porte à l'étuve.

Cette méthode a l'inconvénient de placer le liquide au contact d'une très-petite quantité d'air; aussi souvent n'y a-t-il pas d'altération. Enfin, la quantité d'air enfermé est limitée, ce qui est une mauvaise condition pour le développement des organismes aérobies.

(2) J'appelle ainsi du coton qui a été porté à 200 degrés environ, pour détruire tous les germes qu'il peut renfermer.

les organismes se développent dans certains liquides exposés au contact de l'air, qu'on puisse nier l'existence des germes dans l'air. Aussi n'est-ce pas sur les germes des organismes très-communs, comme le ferment ammoniacal, les vibrions, le ferment lactique, etc., que la discussion a porté, mais surtout sur les germes du ferment alcoolique. Nous allons voir en effet que, si les germes de ce dernier ferment existent presque constamment dans l'air, au moins dans l'air de certaines localités et à certaines époques, du moins ils sont beaucoup moins répandus que les partisans de la génération spontanée voudraient le faire croire comme nécessité de la vérité des opinions contraires.

Voyons d'abord les expériences qui pourraient faire mettre en doute l'existence des germes de levûre dans l'air.

M. Pasteur, dans son Mémoire de 1862, dit que, dans un grand nombre d'expériences, où il semait des bourres d'amianté chargées des poussières de l'air dans de l'eau de levûre sucrée, il ne lui est jamais arrivé d'obtenir la fermentation alcoolique. Et cependant, ajoute-t-il, l'eau de levûre sucrée est constituée à la manière du moût de raisin, du jus de betteraves, etc.; elle est donc très-propre à la fermentation alcoolique.

M. Pasteur avait déjà été frappé de ce fait, et il croyait en avoir saisi la cause dans le rapport qui existe entre la quantité de liquide et la quantité d'air qui se trouvent dans le ballon, mais il a reconnu depuis que la véritable raison venait de la rareté des germes et de ce que, lorsque ces germes existent, ils mettent un temps plus ou moins long pour bourgeonner, et que l'oxygène leur est indispensable; or, dans l'eau de levûre dont l'acidité est faible, il se développe, au bout de deux ou trois jours, des bactéries mobiles qui absorbent tout l'oxygène, comme il le constate, car les moisissures qui avaient pris naissance sont arrêtées dans leur développement.

M. Fremy, dans la brochure qu'il a publiée en 1876, cite beaucoup d'expériences qui, d'après lui, prouvent qu'il n'y a pas de germes de ferments dans l'air.

Ainsi, après avoir recueilli les poussières de l'air sur une bourre de coton, il les introduit dans les liquides qui conviennent le mieux au développement des germes, et qui étaient composés de sucre, de tartrate

d'ammoniaque et de cendres de levûre ; des moisissures se sont développées au bout d'un certain temps dans la liqueur, parce que les poussières contenaient des spores de mycodermes ; mais, dans ces essais, dit M. Fremy, que j'ai multipliés autant que possible, je n'ai jamais produit les fermentations variées qui auraient dû se manifester si l'air eût contenu des germes de ferments différents.

» J'ai soumis à de pareilles épreuves des poussières recueillies dans les localités les plus diverses ; elles ont souvent engendré des moisissures, mais dans aucun cas elles n'ont donné naissance aux fermentations que produisent les suc de fruits, le moût de bière et le lait » (p. 74).

Ces faits ont été constatés pour la première fois par M. Pasteur (*voir ses Mémoires de 1860 et de 1862 sur la fermentation alcoolique et sur la génération spontanée*) ; de plus, dans la discussion qui eut lieu devant l'Académie des Sciences, M. Pasteur a déjà montré que l'interprétation de M. Fremy n'est pas admissible ; d'ailleurs, je vais passer en revue chacun des points séparément et donner les nouvelles expériences que j'ai faites à ce sujet.

M. Fremy sème les poussières de l'air dans un liquide artificiel qui, dit-il, est un de ceux qui *conviennent le mieux* au développement des germes, mais c'est là une assertion que je ne vois démontrée nulle part. Sans doute, M. Pasteur a démontré rigoureusement que de la levûre semée dans un pareil liquide se développe assez facilement et donne naissance à de nouvelles cellules. Cette expérience était excellente pour combattre la théorie de Liebig, d'après laquelle la levûre était toujours produite spontanément par une matière albuminoïde existant dans les liquides sucrés, car là la matière albuminoïde fait défaut ; mais rien n'autorise à conclure que ce milieu est un de ceux qui conviennent le mieux au développement des germes. La levûre adulte ne se reproduit, en effet, dans un pareil milieu, qu'avec une assez grande difficulté, et, certes, il n'y a aucune comparaison entre ce développement, quant à la facilité et la rapidité, et celui qui a lieu dans un liquide sucré naturel, comme le moût de raisin bouilli par exemple. Au reste, M. Fremy le dit lui-même (p. 30) : « Je ne crois pas que, dans le développement de la levûre de bière, le mélange artificiel proposé par M. Pasteur puisse jamais remplacer les substances albumi-

neuses diverses apportées aux cuves de fermentation par les céréales dans la fabrication de la bière. » Si, de plus, on observe que les germes de levûre, qui sont probablement, dans la plupart des cas, des cellules vieilles et desséchées, se développent avec beaucoup plus de difficultés que les cellules jeunes qui sont dans toute leur activité vitale, on verra que M. Fremy a eu recours, non à un des liquides qui *conviennent le mieux* au développement des germes de levûre, mais bien à un de ceux qui *conviennent le moins*.

Si, au lieu de semer les poussières de l'air dans un milieu artificiel, on les avait semées dans un liquide naturel, tel que le moût de raisin bouilli, il est probable que la fermentation aurait eu lieu, au moins dans un certain nombre de cas.

J'ai recueilli, en effet, des poussières de l'air sur une bourre d'amianté préalablement flambée en produisant une aspiration d'air pris dans la rue, à une hauteur de 3 mètres environ. Je laissais passer le courant d'air pendant un ou deux jours, puis j'introduisais la bourre, qui avait alors pris une teinte grisâtre par les poussières qui s'y étaient déposées, dans un tube de moût de raisin bouilli. Souvent, il est vrai, il n'y eut pas de fermentation et il ne se produisit que des moisissures, mais ce résultat est loin d'être constant. Les expériences dont je parle ont été faites surtout dans l'année 1876, pendant le printemps et au commencement de l'été. J'eus une première fermentation vers le 25 juin ; la levûre était le *S. Pastorianus*. Le 8 juillet, j'eus une seconde fermentation, et cette fois, outre la levûre précédente, se trouvaient aussi des cellules rondes qui constituaient très-probablement une levûre différente. Je cessai les expériences à cette époque, mais je ne doute pas que, si j'eusse continué les essais, j'aurais encore obtenu plusieurs autres cas de fermentation, car à l'automne les germes de levûre sont beaucoup plus répandus, comme nous le verrons tout à l'heure.

Ainsi, en semant les poussières de l'air dans un liquide favorable au développement de la levûre, il se produit une fermentation alcoolique.

On peut remarquer néanmoins que le nombre des cas dans lesquels la fermentation se produit est assez restreint, et nous allons en voir la cause. Parmi les germes de levûre existant dans l'air, il en est qui ont une vitalité plus ou moins grande et, par suite, mettent un temps

plus ou moins long pour bourgeonner lorsqu'ils se trouvent placés dans un liquide sucré. D'autre part, nous savons aujourd'hui que l'oxygène est absolument indispensable pour permettre aux cellules-germes de se développer. Enfin, il est nécessaire de faire observer que, lorsqu'on sème une bourre d'amiante recouverte des poussières de l'air, on sème en même temps que les germes de levûre un grand nombre de spores de moisissures. Or, parmi celles-ci, il en est qui ont une grande vitalité et qui, par suite, se développent les premières. La moisissure envahit rapidement le liquide, s'empare de tout l'oxygène qu'il contenait en dissolution, et les germes de levûre ne peuvent plus se développer. Ce serait seulement lorsque, parmi les germes introduits, quelques-uns d'entre eux auraient assez de jeunesse et de vie pour bourgeonner promptement, que la fermentation pourrait avoir lieu, car alors tout l'oxygène dissous n'aurait pas encore été absorbé par les moisissures. J'exposerai tout à l'heure une méthode qui nous permettra d'éviter les inconvénients que je viens de signaler et qui se prêtera beaucoup mieux à l'étude des germes de levûre qui existent dans l'air.

Revenons aux observations de M. Fremy. En semant les poussières de l'air dans le milieu minéral dont il s'est servi, il n'a jamais obtenu « les fermentations variées qui auraient dû se manifester si l'air eût contenu des germes de ferments différents ». Puis il ajoute immédiatement que ces poussières « n'ont pas donné naissance aux fermentations que produisent les sucs de fruits, le moût de bière et le lait ». Il semble d'après cela que, en semant les poussières de l'air dans un milieu minéral, on devait obtenir toutes les fermentations si variées qui se produisent dans les liquides organiques naturels ou artificiels. Avant de conclure ainsi, il eût fallu préalablement s'assurer que ces différentes fermentations pouvaient réellement se produire dans le milieu artificiel en question. Si l'on eût semé dans le liquide minéral Pasteur les organismes qui peuvent vivre dans le moût de bière et le lait, on aurait vu, le plus souvent, que ces organismes ne se développaient pas; il est donc bien naturel que les poussières de l'air n'aient pas produit les fermentations dont il vient d'être question.

Parmi tous les liquides que l'on peut employer pour rechercher la présence des germes de levûre alcoolique dans l'air, celui qui convient

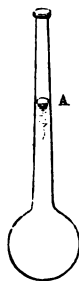
le mieux est sans contredit le moût de raisin bouilli. Il fermente naturellement, par conséquent il doit contenir tous les éléments qui conviennent au développement de la levûre; de plus, il a une acidité telle, que beaucoup d'organismes ne peuvent pas s'y développer. Ainsi, pas de bactéries pour absorber l'oxygène dissous comme avec le moût de bière, pas de vibrions, pas de ferment lactique, pas de ferment de l'urée, etc. La levûre, les moisissures et les torulas sont à peu près les seuls organismes qui puissent vivre dans le moût de raisin. Les torulas ne paraissent pas nuire au développement de la levûre; restent donc les moisissures qui absorbent plus ou moins rapidement l'oxygène en dissolution. Il serait désirable de pouvoir tuer les spores des moisissures sans nuire aux germes des ferments, mais on n'est pas encore arrivé à ce résultat (1). Si l'on ne peut éliminer complètement les moisissures, du moins on peut faire en sorte qu'elles nuisent le moins possible au développement des germes de levûre. La méthode suivante, employée autrefois par M. Pasteur, me paraît excellente sous ce rapport.

On prend des cuvettes en porcelaine peu profondes, dont la surface est d'environ 200 centimètres carrés. On les plonge dans l'eau bouillante de façon à tuer les germes de moisissure ou de levûre (ces germes sont tués, en effet, entre 60 et 70 degrés), on les retire à l'aide d'une pince qui a été elle-même dans l'eau bouillante et on les expose en plein air, sur une terrasse, dans un jardin, etc.; puis on ajoute du moût de raisin étendu de son volume d'eau et qu'on vient de faire bouillir dans un ballon. Le moût est donc mis bouillant dans les cuvettes. On laisse le tout exposé à l'air pendant le temps que l'on juge convenable, vingt-quatre ou quarante-huit heures. Pendant cet intervalle on prépare des ballons à long col (*fig. 15*), dont la contenance doit être très-sensiblement égale au volume du moût qui se trouve dans chaque cuvette. On fait bouillir une petite quantité d'eau au fond des ballons et on les

(1) M. Frey a cru démontrer que les moisissures ne nuisaient pas au développement de la levûre en semant à la fois les deux organismes dans un milieu convenable. Dans ce cas, les deux organismes commencent à se développer en même temps; mais les cellules de levûre semées ne sont pas comparables aux germes, qui mettent toujours plus longtemps pour bourgeonner. Avec la levûre fraîche, le développement a lieu très-rapidement et les moisissures n'ont pas le temps d'absorber tout l'oxygène dissous; d'ailleurs, l'oxygène n'est pas indispensable pour le bourgeonnement des cellules jeunes, ainsi que l'a montré M. Pasteur.

ferme à l'aide de bouchons flambés, de sorte qu'ils sont privés de germes. On a eu soin aussi de mettre dans de l'eau bouillante un nombre d'entonnoirs en verre égal au nombre des cuvettes. Au moment d'introduire le moût des cuvettes dans les ballons, on prend un entonnoir à l'aide d'une pince flambée, on le place sur le ballon, on

Fig. 15.



flambe un coin de la cuvette et on verse le moût par ce coin. On referme les ballons et on les porte à l'étuve à la température de 25 à 30 degrés.

Voyons les avantages de cette méthode : 1° le moût de raisin reste exposé en petite épaisseur au contact de l'air pendant assez longtemps, de sorte qu'il se sature d'oxygène, et les germes de levûre peuvent déjà, avant la mise en ballons, se préparer (si je peux m'exprimer ainsi) pour le bourgeonnement. De plus, le liquide s'élève assez haut dans le col du ballon, jusqu'en A par exemple, de sorte que les moisissures, se formant généralement à la surface, n'absorbent pas assez vite l'oxygène dissous dans le moût qui est dans le ballon lui-même. Les germes de levûre qui sont tombés au fond du ballon peuvent donc se développer. Quelquefois, il est vrai, un mycélium envahit toute la masse du liquide, mais ce n'est pas là le cas général.

On doit chercher à avoir du liquide jusqu'à une hauteur assez grande dans le col du ballon. Si, par suite de l'évaporation, la quantité de liquide est trop petite, on ajoute de l'eau bouillie et refroidie; si, au contraire, elle est trop grande, ce qui arrive lorsqu'il a plu, on met le liquide dans deux ballons ou bien on en rejette une partie et l'on ne conserve que ce qui est nécessaire pour remplir un ballon.

Cette méthode a l'inconvénient d'exiger un matériel embarrassant

et compliqué, surtout lorsqu'on veut faire une expérience loin d'un laboratoire, en pleine campagne par exemple; on se heurte alors à de très-grandes difficultés. Dans ce cas particulier, j'opère de la façon suivante :

Au lieu de cuvettes je prends des tubes à essai, au fond desquels je fais bouillir une petite quantité de moût de raisin étendu d'eau, puis je les ferme avec des bouchons flambés. L'expérience montre que ces tubes se conservent toujours sans altération. On les transporte dans l'endroit où l'on veut rechercher la présence des germes de levûre dans l'air. On enlève les bouchons, qui sont numérotés de façon à pouvoir être replacés sur les tubes où ils étaient primitivement. Lorsque le moût est resté suffisamment longtemps au contact de l'air (ordinairement deux ou trois jours), on replace les bouchons et on rapporte les tubes à l'étuve.

Cette méthode, évidemment beaucoup plus simple que celle des cuvettes, offre la plupart des avantages de celle-ci; le moût reste exposé à l'air deux ou trois jours, pendant lesquels les cellules-germes se préparent au bourgeonnement. Toutefois, les moisissures absorbent beaucoup plus vite l'oxygène en dissolution, parce que l'épaisseur du liquide est beaucoup plus petite et que la quantité est elle-même plus petite. Il faut également préparer un nombre considérable de tubes pour avoir une surface de contact avec l'air aussi grande que celle d'une cuvette seulement. Cependant, cette méthode donne de très-bons résultats lorsqu'on veut comparer les germes de levûre pouvant exister dans des lieux différents et à des époques différentes.

J'ai fait de très-nombreuses expériences, soit avec les tubes, soit avec les cuvettes. En voici quelques-unes :

Le 19 juin, on expose neuf cuvettes sur la terrasse du laboratoire de

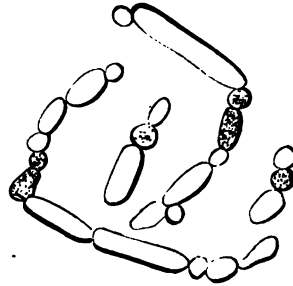
Fig. 16.



M. Pasteur. Deux jours après, le contenu des cuvettes est mis dans des ballons à long col. Le temps avait été beau. Dès le 25, deux ballons

fermentent par une levûre analogue à celle des fermentations basses (*fig. 16*). Un troisième ballon fermente aussi deux jours après, mais le liquide ne se trouble pas comme dans les fermentations ordinaires; au microscope, on constate la présence du *mucor racemosus* (*fig. 17*). Enfin,

Fig. 17.



dans ce dernier ballon et dans un des précédents, on voit à la surface un voile blanc de *mycoderma vini* (*fig. 18*). Les six autres ballons n'ont donné que des moisissures.

Fig. 18.

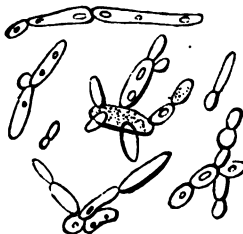


Les 29 et 30 juin, on répète la même expérience. Beau temps. Dès le 5 juillet un ballon fermente, et, quelques jours après, tous les ballons, sauf *un seul*, sont en pleine fermentation. La levûre est une levûre ovale, allongée comme celle des fruits. Pas de *mycoderma vini*. Dans quelques ballons on trouve le *mucor racemosus*, qui s'est développé en même temps que la levûre.

Troisième expérience le 7 juillet. Cette fois, les cuvettes ne restent exposées que *vingt-quatre heures*. Beau temps. Le 12 juillet, cinq ballons fermentent par une levûre formée de cellules ovales et allongées, assez souvent réunies en paquets; c'est à cette levûre qu'on donne le nom de *levûre de fruits* (*fig. 19*), parce qu'elle se forme principalement dans la fermentation des fruits sucrés, ou encore de *saccharomyces Pastorianus*, parce qu'elle a été signalée pour la première fois

par M. Pasteur. Dans deux de ces ballons on trouve, en outre, une petite levûre formée d'une cellule portant deux pointements aux extré-

Fig. 19.



mités du grand diamètre et à laquelle on donne le nom de *levûre apiculée* (fig. 20). Le 13 juillet, trois autres ballons fermentent par la levûre des fruits. Le neuvième ballon n'a donné que des moisissures.

Fig. 20.



Ces trois expériences nous démontrent de la façon la plus nette l'existence des germes de levûre dans l'air, conformément aux résultats déjà trouvés par M. Pasteur. On voit aussi qu'il y a des germes de levûres très-différentes. Il est probable qu'il y a beaucoup d'espèces de levûres, de même qu'il y a beaucoup d'espèces de moisissures. Les levûres formeraient une classe spéciale différant surtout des moisissures en ce qu'elles peuvent vivre dans les liquides sucrés en décomposant le sucre et donnant comme produits principaux de cette décomposition de l'alcool et de l'acide carbonique.

C'est à cette époque que je fus amené à rechercher si les germes de levûre se trouvaient en proportion variable dans les différents lieux, et c'est alors que j'imaginai de remplacer les cuvettes par des tubes.

Le 21 juillet, je porte dix-huit tubes dans les bois, au-dessus de Bellevue. J'en place quatre dans un buisson, quatre sur la lisière du bois et dix dans un jardin où se trouvent des fraises mûres en assez grande

quantité. Le 23, il fait un orage suivi d'une forte pluie. Le 24, les tubes sont bouchés et rapportés au laboratoire. Le 28, *tous* les tubes placés dans le buisson et la lisière du bois fermentent; parmi les dix qui se trouvaient dans le jardin, quatre seulement ont fermenté. La levûre des fruits n'existait que dans un tube; dans tous les autres on trouvait la levûre ovale et ronde, associée quelquefois au *mucor*.

En même temps, j'avais placé dix tubes sur la terrasse du laboratoire, à Paris. Parmi ces dix tubes, deux seulement ont fermenté par la levûre des fruits.

Je fus d'abord un peu surpris de voir que tous les tubes placés dans le buisson ou sur la lisière du bois avaient fermenté; mais, avec un peu de réflexion, je me suis bien vite aperçu que ces tubes avaient dû recevoir plus de poussières de l'air que les autres, puisque la pluie avait entraîné celles qui étaient sur les feuilles des arbres.

Vers le milieu du mois d'octobre, j'ai fait une autre expérience qui montre beaucoup mieux que les germes de levûre sont très-inégalement répandus. On était alors en pleine vendange dans le Jura; je porte quatorze tubes au milieu d'une vigne où la récolte n'est pas faite, quatorze autres dans la plaine, où la vigne n'est presque plus cultivée, enfin quatorze dans la montagne, où la vigne n'existe pas. Tous ces tubes restent exposés aux poussières de l'air pendant trois jours environ.

Parmi les quatorze tubes placés dans la montagne, aucun n'a fermenté. Outre les moisissures, on trouve dans quelques-uns des *dematium ronds* ou *ovales*, ayant une très-grande ressemblance avec la levûre; ils en diffèrent surtout en ce qu'ils ne font pas fermenter les liquides sucrés. Pas de *mycoderma vini*.

Parmi les quatorze tubes placés dans la plaine, trois ont fermenté, un par la levûre apiculée, un autre par le *mucor*, et le troisième par le *mucor* et une petite levûre ronde. Les autres se sont couverts de moisissures, et dans quelques-uns on retrouvait des *dematium*. Un d'eux est recouvert de *mycoderma vini*.

Enfin, lorsqu'on va chercher les tubes qui sont dans la vigne, il y en a déjà deux qui sont en pleine fermentation. Le lendemain, trois nouveaux tubes fermentent, et successivement trois autres les jours suivants. Dans six de ces tubes on trouve la levûre apiculée, mélangée

quelquefois avec une petite levûre ovale; dans un autre, du *mucor*; le dernier renferme un mélange de *mucor* et de petite levûre ovalé. Tous les autres se sont couverts de moisissures, avec un dépôt plus ou moins considérable de *dematium*.

Ainsi, sur un même nombre de tubes, huit ont fermenté parmi ceux qui étaient placés dans la vigne, trois parmi ceux placés dans la plaine, et aucun parmi ceux qui étaient dans la montagne. Il est donc évident que les germes de levûre sont très-inégalement répandus dans l'air des différentes localités. Ces germes existent surtout là où se trouvent des fruits sucrés, et en particulier des raisins, au moment de leur maturité.

On pourrait être étonné qu'il y ait eu trois tubes fermentant parmi ceux placés dans la plaine, tandis qu'il n'y en a pas eu un seul parmi ceux qui se trouvaient dans la montagne. Mais je ferai remarquer que les poussières de l'air doivent être transportées par les vents beaucoup plus facilement dans la plaine, où il n'y a presque pas d'inégalités de terrain, que dans la montagne, où ces inégalités sont considérables. D'ailleurs, dans la plaine, les tubes étaient dans le voisinage d'un chemin de fer qui transportait des vins blancs en pleine fermentation. Il est bien possible que quelques germes aient été apportés de cette façon.

Pendant plus de trois mois, août, septembre et octobre, j'ai placé tous les huit jours un même nombre de tubes dans un même endroit, et toujours j'ai eu la fermentation dans un certain nombre d'entre eux. La moyenne était de un à trois tubes fermentant sur six exposés à l'air.

Une dernière objection de M. Fremy contre la présence des germes dans l'air (p. 75) :

« On sait que l'eau de pluie entraîne presque tous les organismes qui existent dans l'air; donc, dit M. Fremy, s'il existait dans l'air des germes de ferments, la pluie devrait les entraîner comme elle enlève les œufs d'infusoires et les spores de mycodermes.

» En faisant fermenter à l'air du suc de raisin, du moût de bière, du lait ou de l'eau de levûre sucrée, je n'ai jamais constaté de différences entre ces fermentations opérées avant ou après la pluie. Donc, les poussières de l'air n'agissent en aucune manière sur les phénomènes de fermentation. »

Plus loin, M. Fremy ajoute « que les liquides fermentescibles, tels

que le lait, le suc de raisin, le moût d'orge, l'eau de levûre sucrée, fermentent aussi facilement sur les montagnes élevées que dans les villes » (p. 76), ce qui ne devrait pas être, puisque M. Pasteur a montré que l'air pris sur les hautes montagnes est sensiblement pur.

Mais M. Fremy oublie la seule chose essentielle, qui est de priver ses liquides de germes avant de les exposer à l'air. Il est évident qu'il importe peu que l'air soit pur ou impur, si les liquides fermentescibles sont eux-mêmes remplis de germes. En stérilisant les liquides, j'ai constaté, au contraire, que les choses se passent comme l'indique la théorie; mais je n'insisterai pas.

Après avoir montré que les germes de levûre existent dans l'air en assez grande quantité pendant l'été et l'automne, je me suis proposé de rechercher si ces germes y existent à toutes les époques de l'année. J'ai employé des cuvettes, parce que les germes deviennent plus rares pendant l'hiver. L'exposition à l'air a toujours duré deux jours. Voici quelques-uns des résultats :

Les 6-8 novembre, expérience avec dix cuvettes. Beau temps.

Le 11, un ballon fermente par levûre apiculée et ovale.

Le 18, un autre ballon fermente par levûre ovale ordinaire.

Les autres ballons n'ont manifesté aucune espèce de fermentation; un d'entre eux s'est recouvert de *mycoderma vini*.

Les 15-17 novembre, nouvelle expérience avec dix cuvettes. Pluie du 16 au 17; je rejette une partie du liquide surnageant, pour que le reste puisse être contenu dans les ballons à long col.

Dès le 18, trois ballons fermentent par la levûre apiculée.

Du 20 au 21, trois autres ballons entrent en fermentation; mais ici, outre la levûre apiculée, qui est assez rare, on trouve beaucoup de levûre des fruits.

Le 22, deux autres ballons fermentent, l'un par la levûre des fruits, et l'autre par un mélange de levûre ovale et de *mucor*.

Les deux derniers n'ont donné aucun signe de fermentation.

Je ferai remarquer que cette expérience est la première dans laquelle je retrouve la levûre allongée des fruits depuis le mois d'août.

Les 11-13 décembre, nouvelle expérience avec dix cuvettes. Petite pluie le 12 au soir; mais le volume du liquide n'a pas sensiblement augmenté.

Le 14, un ballon fermente par la levûre apiculée.

Du 18 au 21, quatre ballons fermentent par la levûre des fruits.

Du 25 au 26, trois autres ballons fermentent par la même levûre.

Les deux autres n'ont donné que des moisissures.

Les 15-17 janvier 1877, expérience avec dix cuvettes. Quelques gouttes de pluie le 16.

Le 25, un ballon fermente par la levûre des fruits.

Le 10 février, autre ballon qui fermente par la même levûre. A cette époque, on voit quelques bulles qui s'élèvent du fond d'un troisième ballon. Pas de trouble. Trois jours après, le trouble se manifeste, et la fermentation est très-active. Levûre ovale.

Le 6 mars, un quatrième ballon commence à fermenter d'une manière analogue au précédent. Le 13, la fermentation étant assez active, on examine la levûre au microscope et l'on voit qu'elle est formée par des cellules rondes, plus grosses que la levûre ordinaire, à contours noirâtres, avec granulations à l'intérieur. Il est fort possible que ce soit un *mucor* particulier.

Les cinq autres ballons n'ont donné que des moisissures.

Les 10-12 mars, nouvelle expérience avec dix cuvettes. Beau temps.

Le 16, un ballon fermente activement par un mélange de levûre ronde et de petite levûre ovale.

Le 21, un autre ballon fermente par levûre ronde.

Tous les autres n'ont jamais manifesté le moindre signe de fermentation.

Les 26-28 avril, nouvelle expérience avec dix cuvettes. Orage et pluie le 27.

Le 16 mai, un ballon commence à fermenter, mais on ne voit que de très-légères bulles, sans trouble général. Le 2 juin, la fermentation a complètement cessé; j'examine la levûre: elle est constituée par des cellules rondes réunies en paquets (*fig. 21*). En semant cette levûre, elle fait fermenter un liquide sucré, mais très-lentement et sans trouble général. Le sucre n'est pas entièrement décomposé, car, si l'on sème de la levûre ordinaire, il y a encore une petite fermentation.

Un deuxième ballon a aussi commencé à fermenter, surtout dans le col, vers le 15 mai; la levûre qui se déposait sur le col incliné est tombée peu à peu dans le ballon; les bulles se sont alors élevées du

fond du ballon, mais toujours avec beaucoup de lenteur; la fermentation a duré plus de quatre semaines; au microscope, la levûre est formée de cellules très-allongées avec des granulations intérieures; peut-être n'était-ce que du *mycoderma vini*. En ensemençant cette levûre

Fig. 21.



dans un tube de moût de raisin, il se produit très-rapidement un voile de *mycoderma vini* en même temps que quelques rares bulles s'élèvent du fond du tube.

Conséquences. — Il y a des germes de levûre dans l'air à toutes les époques de l'année, puisque dans toutes les expériences un certain nombre de ballons ont éprouvé la fermentation, mais les germes y existent en proportion variable. Lorsqu'il pleut pendant que les cuvettes sont exposées à l'air, il y a un plus grand nombre de ballons qui fermentent, ce qui tient à ce que la pluie a entraîné les germes qui se trouvent dans l'atmosphère.

Les germes se développent au bout d'un temps très-variable, deux ou trois jours dans quelques cas, quinze jours et même davantage dans d'autres. On voit ainsi la nécessité d'empêcher les moisissures d'envahir tout le liquide, car elles absorberaient tout l'oxygène dissous, et les germes ne pourraient plus bourgeonner.

Ces résultats nous permettent de comprendre comment M. Fremy a pu être induit en erreur, tout à fait à son insu, lorsqu'il a annoncé qu'il n'y avait pas de germes de levûre dans l'air. En effet, outre que le liquide dont il s'est servi de préférence est très-mal choisi, il a probablement pensé qu'il suffisait de l'exposer pendant quelques instants, quelques heures au plus, au contact de l'air pour recueillir des germes; de plus, il ne dit pas à quelle époque de l'année il a opéré, si les vases présentaient une large surface de contact avec l'air; enfin il n'a pris aucune précaution pour éviter l'influence des moisissures. Si M. Fremy

voulait bien répéter l'expérience dans les conditions où je me suis placé, je ne doute pas qu'il n'obtienne des résultats semblables aux miens.

Germes de levûre sur les grains et les grappes de raisin.

Plusieurs fois dans le courant de ce travail j'ai avancé que les germes de levûre alcoolique étaient très-répondus sur les grains de raisin, et particulièrement sur les grappes. Ce fait très-important a été découvert par M. Pasteur, il y a déjà plusieurs années. Après avoir constaté que dans l'air ces germes sont peu abondants, et que cependant les différentes parties d'un raisin fermentent presque toujours, à la condition de réunir un certain nombre de grains, M. Pasteur pensa que les germes ne devaient pas toujours venir des poussières de l'air, et qu'ils existaient probablement sur les grains et sur les grappes. Pour vérifier cette idée, il introduisit dans des tubes de moût de raisin bouilli des fragments de grappe, avec toutes les précautions nécessaires pour éviter les germes de l'air. Dans la grande majorité des cas, il y eut fermentation. De très-petits fragments de grappe suffisent même pour faire fermenter un certain nombre de tubes, mais naturellement ce nombre est d'autant plus grand que les fragments introduits sont plus gros. Il n'est même pas nécessaire de mettre la grappe elle-même; il suffit de la laver avec un petit pinceau bien propre et de semer l'eau de lavage dans le moût de raisin bouilli. De même, l'eau de lavage des grains provoque encore la fermentation, mais moins fréquemment. Aussi M. Pasteur a-t-il conclu de ses expériences que les germes de levûre étaient très-répondus sur les grappes et qu'ils existaient aussi sur les grains, quoique en proportion moindre. Ce sont ces germes qui, évidemment, provoquent la fermentation des cuves de vendange et non ceux de l'air. Ces derniers sont en effet en assez petite quantité, et plus ou moins desséchés; ils mettraient donc un temps plus long pour se développer et produire la fermentation d'une aussi grande masse de matières sucrées.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer combien la découverte de ces germes est contraire à la théorie de M. Fremy, d'après laquelle la

levûre est toujours produite spontanément par le jus de raisin. Voici ce que répond M. Fremy à cette expérience, qu'il ne conteste pas (p. 59) :

« Il faut bien se garder de confondre une fermentation alcoolique véritable, qui se produit *immédiatement* dès que le ferment alcoolique est en présence de la liqueur sucrée, avec une fermentation qui est la conséquence de la production des moisissures.

» Cette fermentation du moût de raisin cuit, sous l'influence des poussières, ne se fait pas immédiatement, comme dans l'action de la levûre de bière sur le sucre.

» La fermentation du moût de raisin cuit n'a lieu que lorsqu'il s'est formé des moisissures dans les liqueurs. Or, on sait aujourd'hui que les moisissures engendrent des ferments.

» M. Pasteur établit donc ici, au profit de ses théories, une confusion entre la génération des ferments et celle des moisissures. »

Ainsi, les cellules de levûre sont produites par des moisissures. Mais alors comment se fait-il que M. Fremy, dans toutes les expériences où il a exposé des liquides fermentescibles au contact de l'air, n'obtienne pas la fermentation alcoolique, puisque, de son aveu, il obtient des moisissures ? M. Fremy dira peut-être que toutes les moisissures ne produisent pas du ferment alcoolique ; dans ce cas, il se trouvera obligé d'admettre qu'il y a à la surface des grappes et des grains de raisin des moisissures spéciales qui, mises dans des liquides sucrés, donnent naissance à de la levûre et provoquent la fermentation. Alors nous voilà presque d'accord, car M. Pasteur pense, et je suis tout à fait de son avis, que les germes de levûre qui se trouvent à la surface des grappes ou des grains de raisin doivent provenir de certaines moisissures qui, à une certaine époque et sous certaines influences encore inconnues, émettraient des cellules spéciales ayant la propriété de bourgeonner dans des liquides sucrés et de décomposer le sucre. Mais où M. Fremy est, je crois, dans l'erreur, c'est lorsque ce savant regarde les moisissures qui se sont développées à la surface du liquide comme des producteurs de levûre alcoolique. En effet, en suivant le phénomène avec attention, on voit souvent la fermentation se déclarer avant d'apercevoir la moindre trace de moisissures. Dans les autres cas, pour conclure comme le fait M. Fremy, il aurait fallu ensemer les moisissures dans un liquide sucré et constater qu'elles le faisaient fermenter. Or, j'ai fait cela

bien souvent, et à la seule condition de prendre les précautions nécessaires pour avoir de la semence pure, je n'ai jamais eu de fermentation.

Poursuivons l'examen des expériences de M. Fremy.

« Mes recherches, dit-il, ont pour but d'établir qu'il se forme dans l'intérieur des tubes mycodermiques, par conséquent, dans des conditions où les poussières de l'air ne peuvent pas pénétrer, des organismes qui agissent ensuite comme de véritables ferments.

» Lorsqu'on suit au microscope la formation des tubes mycodermiques qui se développent dans une dissolution d'acide tartrique, on reconnaît que ceux qui sont de nouvelle formation restent incolores, transparents, et qu'ils ne contiennent pas de particules solides dans leur intérieur.

» En vieillissant, ces tubes prennent de la couleur et se remplissent de corpuscules organisés qui peuvent sortir des tubes et se mettre en suspension dans la liqueur, soit spontanément, soit par une légère pression.

» Si l'on introduit cette végétation mycodermique dans une mousseline très-fine, et qu'on la comprime dans de l'eau distillée, il est facile de séparer mécaniquement les granules qui existent dans les tubes. En mettant séparément dans de l'eau sucrée ces deux parties de la végétation mycodermique, j'ai reconnu que les tubes n'agissaient que très-lentement sur le sucre, tandis que les granules, qui présentaient l'aspect de certains ferments, transformaient le sucre soit en acide lactique, soit en acide butyrique, et que dans cette fermentation il se dégageait tantôt de l'hydrogène, tantôt de l'acide carbonique.

» Voici donc un mode de génération des ferments bien nettement établi ; en suivant une végétation mycodermique, on assiste à la formation de véritables ferments qui s'engendrent dans des tubes organiques fermés, par conséquent dans des conditions où les prétendus germes atmosphériques de M. Pasteur, c'est-à-dire les poussières de l'air, ne peuvent pas pénétrer » (p. 87).

Il est visible qu'il n'a été prise aucune précaution pour éloigner les germes étrangers à la moisissure, germes pouvant se trouver dans l'acide tartrique, dans la mousseline, dans l'eau, dans l'air, etc. Aucune observation microscopique ne paraît avoir été faite pour

constater s'il y avait d'autres ferments que les granules dans le liquide sucré; enfin, après avoir observé une fermentation *lactique* ou *butyrique*, M. Fremy tire des conséquences relatives à la fermentation alcoolique.

Sans nous appesantir sur la question de savoir si certaines moisissures ne peuvent pas, dans des conditions particulières, donner naissance à du ferment alcoolique, nous pouvons assurer que jusqu'ici on n'est pas arrivé à suivre une telle transformation. Je m'empresse d'ajouter que la théorie de M. Pasteur ne serait aucunement ébranlée par une telle constatation.

Revenons aux germes de levûre existant sur les grappes et les grains de raisin.

En examinant l'eau de lavage des grappes, on voit, dit M. Pasteur, dans son Ouvrage intitulé *Études sur la bière*, « des cellules, les unes simples, translucides, incolores, d'autres plus grosses, colorées en jaune brun, libres ou réunies en amas irréguliers, et enfin des utricules pleins de spores prêtes à germer, quelques-unes en forme de gourdes. On retrouve en très-grand nombre les mêmes cellules dans l'eau de lavage des grappes de plants différents.

• Pour suivre au microscope la germination de ces diverses sortes de cellules, on dispose une goutte d'eau dans une petite quantité de moût de raisin bouilli. Les cellules jaune brun se ramollissent, se distendent et deviennent peu à peu translucides et incolores. En même temps, on voit apparaître sur leur pourtour des bourgeons très-jeunes qui grossissent vite et se détachent sous forme de jeunes cellules qui font place à d'autres, tandis que les précédents vont bourgeonner à leur tour. La rapidité du bourgeonnement et de la prolifération de ces cellules est souvent extraordinaire. Il y a d'autres groupes de cellules qui poussent tout de suite des tubes longs, cloisonnés à la manière des tubes de mycélium des moisissures ordinaires, en même temps que des cellules à profusion, lesquelles cellules se montrent également sur toute la longueur des tubes et souvent par bouquets. La preuve que parmi ces développements de cellules et de tubes il existe réellement la levûre ou les levûres de la vendange, c'est que, si l'on vient à semer une goutte de ce liquide dans du moût de raisin bouilli, la fermentation ne tarde pas à se déclarer. •

Ainsi, plus de doute possible : à la surface des grains de raisin, et surtout du bois de la grappe, se trouvent des cellules-germes.

M. Pasteur a reconnu également que ces cellules-germes n'apparaissent sur la grappe que lorsque le raisin est voisin de la maturité. Avant cette époque, les grappes mises dans des tubes de moût bouilli donnent des moisissures, des torulas, mais pas de levûre (¹). De plus, ces germes sont répartis irrégulièrement ; il y a des grains qui en portent et d'autres qui n'en portent pas. Il peut même arriver, comme cas particulier, qu'un raisin tout entier n'en porte pas : c'est ce que M. Pasteur a constaté sur une grappe de raisin noir frais acheté chez Chevet à la fin du mois d'avril. Ni les grains ni la grappe n'ont provoqué la fermentation. Je sais que ce raisin provenait d'une serre et se trouvait, par conséquent, dans des conditions défavorables pour recevoir les germes de l'air, mais on comprend que le cas puisse se présenter aussi pour un raisin ayant mûri en plein air.

Maintenant, d'où viennent les germes de levûre qui apparaissent ainsi au moment de la maturité sur tous les fruits sucrés, et en particulier sur les raisins ? Je viens de laisser entrevoir qu'ils pourraient bien venir des germes de l'air (²). En effet, nous avons vu qu'il y a des germes dans l'air à toutes les époques de l'année, et qu'ils sont particulièrement nombreux pendant l'été et l'automne ; par suite, ils doivent se déposer partout, et en particulier sur les raisins. Mais, tandis qu'ils resteraient à l'état inerte sur les différentes espèces de bois, ces germes pourraient vivre à la façon des moisissures et donner naissance à de nouvelles cellules-germes lorsqu'ils se trouveraient sur les fruits sucrés. Il y aurait ainsi une multiplication des cellules sur les grains de raisin et sur les grappes, multiplication qui se produirait seulement au moment de la maturité du fruit. Cette manière d'expliquer le phénomène permettrait de comprendre pourquoi les germes de levûre sont en général peu nombreux sur les premiers fruits sucrés.

(¹) Il pourrait arriver qu'en faisant un grand nombre d'essais on eût la fermentation dans un ou deux tubes, mais cette fermentation serait provoquée par les germes de l'air qui se seraient déposés sur les grappes comme ils se déposent un peu partout.

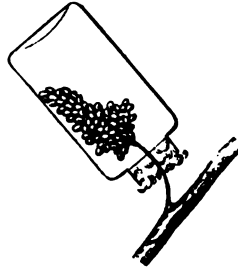
(²) M. Pasteur avait cru avoir démontré que ces germes étaient les mêmes que ceux du *mycoderma vini*, mais il a expliqué, dans son Ouvrage sur la bière, comment il avait été induit en erreur.

Mais ces germes pourraient avoir aussi une autre origine. Lorsqu'on met des fragments de bois ou des portions de fruits verts dans du moût de raisin bouilli, on constate qu'il se produit presque toujours, outre les moisissures de la surface, un dépôt quelquefois assez considérable de *dematium* ayant la plus grande ressemblance avec la levûre. Il serait donc possible que ces *dematium*, qui existent partout, sur le bois, sur les fruits verts, sur les brins d'herbe, pussent, à un moment donné de leur vie, agir à la façon des cellules de levûre.

Pour décider entre ces deux hypothèses, j'ai fait l'expérience suivante :

Au commencement du mois d'août, les raisins étant encore verts, j'ai enfermé un raisin dans un bocal de verre, comme le montre la *fig. 22*.

Fig. 22.



Le bocal avait été flambé pour le priver de tous les germes pouvant exister sur ses parois, et le goulot était bouché par un tampon de coton permettant la libre circulation des gaz, mais suffisant pour s'opposer à l'introduction des poussières de l'air. Le flacon était incliné, de sorte que quelques grains reposaient contre les parois.

Dans une autre expérience, j'avais placé un flacon plus petit tout à fait verticalement (*fig. 23*), et je n'avais pas pris la précaution de fermer l'ouverture avec du coton, pensant que les poussières de l'air avaient peu de chance de remonter dans l'intérieur.

Voici le raisonnement que j'avais fait :

Lorsque les raisins sont verts, il n'y a pas encore de cellules de levûre à leur surface, mais les *dematium* y existent en grande quantité; si donc ces *dematium* peuvent se transformer en levûre en végétant sur les raisins, ceux-ci devront éprouver la fermentation absolument comme

les raisins non enfermés; si, au contraire, les germes de l'air sont indispensables à la production des germes de levûre sur le raisin, ceux qui sont enfermés ne devront pas donner de fermentation.

Fig. 23.



Le 24 octobre, les raisins sont très-mûrs; celui qui est dans le petit bocal est magnifique; celui du grand n'est malheureusement pas aussi beau, beaucoup de grains qui touchaient les parois sont pourris et recouverts de moisissures.

Les grains du raisin sain sont mis dans trois tubes de moût de raisin bouilli, à raison de sept ou huit grains par tube. La grappe a été mise tout entière dans un autre. Aucun de ces tubes n'a donné de fermentation. Quant au raisin du grand bocal, les grains sains ont été mis dans deux tubes et la grappe dans un troisième; aucun d'eux n'a fermenté.

J'ai fait une expérience comparative avec d'autres raisins pris sur le même cep, mais non enfermés dans des bocaux. Les grappes, mises à peu près en même quantité que dans les expériences précédentes, ont toujours fait fermenter; quant aux tubes dans lesquels j'avais mis sept ou huit grains, j'ai eu en moyenne un tube sur quatre qui n'a pas fermenté.

Cette expérience a été reprise l'année suivante, en 1877. Seulement les raisins ont été d'abord mis dans des sacs de crin, afin d'éviter le contact direct des grains avec les parois de verre. Les résultats ont été absolument les mêmes. Il faut donc conclure que les *dematium* ne se transforment pas en levûre alcoolique et que les germes qui existent sur les fruits sucrés proviennent des germes de l'air.

M. Pasteur a cherché aussi si ces germes pouvaient se conserver pendant longtemps. A cet effet, les grappes étaient enfermées dans du papier de

soie et mises dans un grand bocal dans le laboratoire. A des intervalles plus ou moins éloignés, on prenait une partie de ces grappes pour les mettre dans du moût de raisin bouilli. M. Pasteur trouva ainsi que les germes actifs allaient en diminuant insensiblement; vers le commencement d'avril, la stérilité fut absolue.

Il existe dans le Jura un vin, dit *vin de paille*, qui paraît en contradiction avec ce fait, car il est fait avec des raisins conservés pendant très-longtemps sur de la paille après la récolte. Lorsqu'on fabrique ce vin après le mois d'avril, il ne devrait pas fermenter. Aussi M. Pasteur pense que la fermentation a lieu par la poussière de levûre répandue sur les ustensiles du vigneron depuis la dernière récolte, poussière qui conserve sa faculté de germination pendant plusieurs mois. Comme conséquence, si l'on écrasait les raisins dans des appareils privés de tous germes, il ne devrait pas y avoir fermentation.

Les faits que j'ai observés ne sont pas d'accord avec cette interprétation. J'ai mis, en effet, dans des tubes de moût de raisin bouilli des grains ou des fragments de grappes de raisin conservées depuis la récolte jusque vers la fin du mois de juin. J'ai obtenu la fermentation dans un grand nombre de tubes, soit par la grappe, soit par les grains, et la levûre qui se formait était la levûre allongée des fruits. Cette expérience a été faite en 1876 avec des raisins provenant de deux endroits différents; je l'ai répétée en 1877, et le résultat a été le même. On ne peut donc douter que, sur des raisins conservés, il existe encore des germes actifs de levûre à la fin du mois de juin. Le vin de paille, qui est toujours fabriqué avant cette époque, fermenterait donc lors même que les raisins seraient écrasés dans des ustensiles privés de tous germes.

La différence qui existe entre ces résultats et ceux constatés par M. Pasteur me paraît tenir aux conditions particulières dans lesquelles ont été conservées les grappes dont il s'est servi. Elles étaient, en effet, enveloppées dans un papier de soie et mises dans un bocal fermé. Il en résulte qu'elles se desséchaient très-vite, n'étant pour ainsi dire pas exposées aux variations hygrométriques de l'air. Les grappes de raisin conservées sont, au contraire, toujours plus ou moins humides; les germes peuvent donc garder leur vitalité beaucoup plus longtemps.

Il m'a paru intéressant de rechercher si les germes de levûre périssaient sur les grappes restant à la vigne pendant l'hiver. Pour cela, j'ai

enlevé les grains et laissé les grappes sur les ceps jusqu'au mois d'avril. Au bout de ce temps, il y avait encore des germes actifs, mais en proportion beaucoup plus petite que pour les vendanges. Il était évident qu'un certain nombre de cellules-germes étaient mortes. Il m'a paru aussi que les germes étaient plus nombreux sur des grappes venant d'une treille presque complètement à l'abri de la pluie que sur celles qui étaient restées en plein air au milieu des vignes, ce qui peut tenir à ce que la pluie avait entraîné un certain nombre des germes existant sur celles-ci (').

Enfin, les germes de levûre se développent-ils à la fois sur les grains de raisin et sur les grappes, ou bien sur les grains seulement? Pour résoudre cette question, j'ai coupé les grains des grappes pendant que les raisins étaient encore verts. Toutes les grappes auxquelles on avait enlevé les grains avant le mois de juillet ont séché; mais celles dont les grains avaient été coupés vers la fin de juillet ont continué à vivre et sont restées vertes. On les a cueillies après les vendanges, c'est-à-dire au moment où les autres portaient beaucoup de germes, et on les a mises dans des tubes de moût de raisin bouilli. Avec une dizaine de ces grappes je n'ai pas eu un seul cas de fermentation.

Cette expérience a de nouveau été reprise en 1877, sur un plus grand nombre de grappes, et elle a donné absolument le même résultat.

Si nous admettons l'idée souvent émise que les germes sont des cellules détachées d'un organisme plus élevé, il résulte de là que cet organisme ne peut pas puiser sa nourriture sur la grappe du raisin; il n'y aurait que le grain lui-même, et seulement au moment de la maturité, qui pourrait lui fournir un aliment convenable et lui permettre de se développer. Cet organisme, encore inconnu, serait donc un parasite des fruits sucrés, de même que certaines moisissures sont des parasites de différentes plantes.

(') Ces expériences ont été faites sur des grappes de la récolte 1876. L'hiver fut très-doux; il est possible que les germes disparaissent plus rapidement pendant les hivers rigoureux.

**Résistance de certains germes à l'action d'une température de 100 degrés.
Conditions de leur développement.**

Dans ces dernières années, beaucoup d'observateurs ont publié des travaux sur la résistance que présentent certains liquides organiques à l'action d'une température de 100 degrés. Dès 1862, M. Pasteur appelait l'attention sur ce fait que l'ébullition du lait ne le rend pas stérile, tandis que les autres liquides, l'eau de levûre de bière, l'urine acide, le moût de bière, le moût de raisin, se conservent sans altération après une ébullition de quelques instants. La cause de cette différence, d'après M. Pasteur, tient à ce que le lait a une réaction neutre ou légèrement alcaline, tandis que les autres liquides ont une réaction acide. Il en donne la preuve en montrant que, si l'on sature de l'eau de levûre par du carbonate de chaux, l'ébullition ne suffit plus pour la stériliser.

Ce fait est général, comme nous le verrons dans un instant. Tous les liquides organiques neutres ou légèrement alcalins donnent naissance à des organismes microscopiques, lors même qu'ils ont été portés à la température de 100 degrés, même pendant plus d'une heure. Ces organismes paraissent être les mêmes avec les différents liquides : au début, lorsque le trouble commence à se produire, ce sont des bâtonnets plus ou moins allongés et articulés, en général mobiles; puis ils viennent se rassembler à la surface du liquide, où ils forment un voile d'aspect gras et ridé et ayant une couleur grisâtre ou rougeâtre. L'examen microscopique d'un fragment de ce voile montre une multitude de petits corps un peu allongés, très-réfringents, de sorte qu'en faisant varier un peu la mise au point ils apparaissent brillants ou sombres; à ce moment, il n'y a plus que quelques rares bâtonnets immobiles. En faisant des prises fréquentes, il est facile de suivre la transformation; on voit alors les points allongés brillants se former dans l'intérieur des bâtonnets; bientôt la matière qui les réunit se résorbe et ils deviennent libres. Ces points brillants, placés dans des conditions convenables, donnent eux-mêmes naissance à des bâtonnets qui, après s'être reproduits pendant un certain temps par scissiparité, donnent à leur tour des points bril-

lants. C'est là un mode de génération de certains organismes qui a été décrit pour la première fois par M. Pasteur. Les points brillants sont donc pour ainsi dire les graines des bâtonnets; nous les appellerons des *spores*; quant aux bâtonnets eux-mêmes, nous leur donnerons le nom de *bacillus subtilis*, conformément à la classification adoptée par Cohn, le savant physiologiste allemand.

Le liquide sur lequel on a fait le plus d'expériences est l'eau de foin, qu'on obtient en mettant digérer de l'eau avec du foin pendant six heures à la température de 36 degrés environ. Les principaux observateurs qui ont fait des travaux avec ce liquide sont Cohn en Allemagne, Roberts et Tyndall en Angleterre.

W. Roberts a publié ses recherches dans un excellent Mémoire contenu dans les *Transactions philosophiques* de 1874.

Les expériences du professeur Cohn confirment celles du D^r Roberts quant à la résistance des infusions à l'action de la chaleur. Tant que la période d'ébullition ne dépassait pas quinze minutes, des organismes apparaissaient dans les infusions. Dans certains cas, soixante, quatre-vingts et même cent vingt minutes n'ont pas suffi. Il y a cependant une différence marquée entre les résultats obtenus par ces deux expérimentateurs. Tandis que le D^r Roberts trouve qu'une ébullition de cinq minutes est suffisante pour stériliser les infusions légèrement acides, le professeur Cohn ne trouve aucune différence dans la résistance des infusions, qu'elles soient neutres ou acides.

Le professeur Tyndall a publié, en 1877, un long Mémoire sur cette question; il trouve des résultats qui tantôt confirment, tantôt infirment ceux des deux observateurs précédents. La cause de ces différences, d'après lui, serait due à la nature du foin, sur lequel se trouveraient des germes plus ou moins résistants suivant que le foin serait plus ou moins vieux.

Je n'entreprendrai pas de décrire la manière d'opérer de chacun de ces observateurs; ils se sont surtout préoccupés de ne pas laisser rentrer de germes venant de l'air pendant le refroidissement et ont imaginé à cet effet des dispositions plus ou moins simples, mais assurément très-compliquées. Cette cause d'erreur, d'ailleurs, est loin d'avoir l'importance qu'ils lui ont attribuée.

Mes expériences ont surtout porté sur l'eau de foin, l'eau de levûre

de bière, le moût de raisin et l'urine (¹). Ces liquides avaient quelquefois naturellement l'acidité ou l'alcalinité que je désirais; d'autres fois, je leur donnais cette acidité ou cette alcalinité en ajoutant des quantités convenables d'acide sulfurique ou de potasse étendus.

Je me suis d'abord occupé de la distinction à établir entre les liquides neutres ou légèrement alcalins et les liquides légèrement acides. Voici une des méthodes que j'ai employées et qui me paraît excessivement simple.

On introduit les liquides plus ou moins acides ou alcalins, et additionnés de spores d'une culture précédente (²), dans des tubes en verre étroits et forts, fermés par un bout (*fig. 24*). On ferme à la lampe

Fig. 24.



le côté resté ouvert. On agite les tubes de façon que toutes les parois soient mouillées par le liquide et on les plonge dans l'eau bouillante pendant dix minutes. Ce temps est suffisant pour que le liquide intérieur soit porté à la température de l'eau bouillante pendant plusieurs minutes. Il est bon d'agiter de nouveau les tubes pour mouiller les parois après sept ou huit minutes d'immersion. Dans ces conditions, toutes les fois que l'acidité des liquides était égale ou supérieure à 1 centimètre cube d'acide sulfurique normal décime pour 20 centimètres cubes de liquide (³), on ne voyait jamais apparaître

(¹) Je ferai remarquer que ce dernier liquide ne peut pas être employé lorsqu'on doit chauffer pendant longtemps, car l'urée qu'il contient se décompose sous l'action de la chaleur, de sorte que la réaction varie constamment.

(²) Cette addition de spores est nécessaire pour être certain que les liquides en renferment.

(³) Ce qui correspond à 0^{sr},245 par litre.

d'organismes microscopiques; si, au contraire, les liquides étaient neutres ou légèrement alcalins, l'altération se manifestait très-rapidement.

Les résultats sont absolument les mêmes si l'on fait bouillir les liquides pendant deux minutes dans un *ballon flambé*.

Cette même expérience me montrait, en outre, quelle était la réaction des liquides s'altérant le plus facilement après l'action de la chaleur. Ces liquides étaient ceux qui étaient sensiblement neutres ou légèrement alcalins. Dès que l'alcalinité devient un peu notable, il n'y a plus de développement.

J'ai cherché ensuite à quelle température il fallait porter les tubes après leur sortie de l'eau bouillante pour que l'altération fût la plus rapide et la plus certaine. A cet effet, j'ai mis dans des étuves à 20, 32, 38, 44 et 50 degrés des tubes renfermant de l'eau de foin neutre additionnée de spores et retirés de l'eau bouillante après une demi-heure, une heure, une heure et demie, deux heures, etc.

J'ai trouvé que ceux qui s'altéraient le plus rapidement étaient les tubes placés dans l'étuve à 38 degrés. A 20 degrés, il n'y eut pas d'altération. A 32, 44 et 50 degrés, l'altération se produisait encore, mais moins rapidement. Quelquefois même, des tubes qui avaient été chauffés pendant très-longtemps s'altéraient à 38 degrés, tandis qu'ils ne s'altéraient pas aux autres températures. En remettant ces derniers tubes à 38 degrés, on constatait leur altération.

Par conséquent, pour avoir les conditions les plus favorables au développement des *bacillus*, il faut se servir de liquides neutres mis ensuite à l'étuve à 38 degrés.

Mais pendant combien de temps les spores placées dans des liquides neutres peuvent-elles résister à l'action de la température de 100 degrés?

Pour le savoir, je plonge les tubes dans l'eau bouillante et je les retire après des temps variables, une heure, deux heures, trois heures, etc., puis je les porte à l'étuve à 38 degrés. Ici les résultats sont différents suivant la nature du liquide. Celui qui m'a paru offrir la plus grande résistance est l'eau de levûre neutre, qui s'est altérée après cinq heures d'ébullition, puis l'eau de foin neutre, également après cinq heures, mais moins rapidement, le bouillon Liebig après trois heures, le moût de raisin neutralisé après une heure et demie. Ainsi, indépendamment

de la réaction au papier de tournesol, la nature même du liquide a une grande influence sur l'altération ultérieure. Après six heures d'ébullition, j'ai toujours eu la stérilité complète, mais il est possible que d'autres liquides présentent encore une plus grande résistance.

Une question très-importante se présente naturellement à l'esprit. L'eau commune renferme les germes de tous les organismes microscopiques; elle renferme donc des spores de *bacillus*, et, comme elle est neutre, on doit se demander si l'ébullition suffit à la priver de tous germes vivants, comme on l'a admis jusqu'ici. Pour le savoir, il fallait ensemercer de l'eau portée à 100 degrés pendant des temps variables dans des liquides neutres stériles.

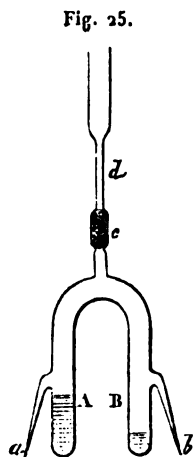
Voici une expérience préliminaire destinée à m'indiquer la température que je devais atteindre pour que la stérilité fût certaine.

On plonge complètement dans le bain de chlorure de calcium des tubes étroits fermés aux deux bouts et contenant de l'eau de foin neutre additionnée de spores. On chauffe en ayant soin d'agiter constamment le bain de façon que la température soit uniforme.

On retire le 1 ^{er} tube lorsque la température est.....	100°
» 2° » 4 minutes après, et la température est..	105
» 3° » 6 » » »	108
» 4° » 8 » » »	110
» 5° » 10 » » »	112
» 6° » 12 » » »	113
» 7° » 15 » » »	115
» 8° » 18 » » »	116

A ce moment, le bain dont je me servais commence à entrer en ébullition. Les tubes sont ensuite portés à 38 degrés. Au bout de deux ou trois jours les six premiers sont altérés, mais les deux derniers se sont conservés indéfiniment. Or, comme les tubes étaient chauffés en même temps que le bain, on peut admettre qu'ils avaient sensiblement la température du bain au moment où on les a retirés. Néanmoins, pour plus de sûreté, surtout en mettant les liquides dans des ballons, j'ai pensé qu'il était bon de les porter à la température de 115 degrés et même de les laisser pendant quelque temps à cette température. Dans ces conditions, tous les liquides neutres dont je me suis servi ont toujours été parfaitement stérilisés.

Revenons maintenant à l'expérience qui doit nous montrer si l'eau bouillie peut encore renfermer des germes vivants. On aspire le liquide neutre dans l'une des branches A d'un tube en verre à deux effilures flambé ACB (fig. 25) (¹), puis on ferme l'effilure *a* à la lampe; dans l'autre



branche B on aspire une petite quantité d'eau additionnée de spores; on ferme l'effilure *b* à la lampe et l'on plonge les deux branches dans l'eau bouillante. On retire les tubes après des temps variables, une demi-heure, une heure, une heure et demie, deux heures, etc. Puis on fait passer une partie du liquide de la branche A dans la branche B. Le liquide qui reste dans la branche A sert de témoin pour s'assurer qu'il est bien stérilisé. En opérant ainsi, j'ai constaté qu'il se produisait des *bacillus* dans la branche B même après deux heures d'exposition à 100 degrés; mais, après trois heures, il n'y eut plus d'altération.

Les spores de *bacillus* placées dans l'eau distillée peuvent donc résister pendant plus de deux heures à la température de 100 degrés.

J'ai fait la même expérience en remplaçant l'eau additionnée de spores par de l'eau du robinet. Ici les résultats paraissent contradictoires. Tantôt il y avait altération avec des tubes qui avaient été chauffés

(¹) En C se trouve du coton qui a été flambé en même temps que le tube. Le flambage se fait en mettant le tube dans un fourneau à gaz dont la température est de 150 à 200 degrés.

Ces tubes ont été disposés et utilisés pour la première fois dans les expériences que M. Pasteur a faites pour détruire les assertions du D^r Bastian.

pendant une heure, une heure et demie, tantôt des tubes chauffés pendant quelques minutes seulement restaient tout à fait stériles. Ces différences étaient surtout très-nettes lorsqu'on n'introduisait que très-peu d'eau. La cause saute aux yeux : l'eau, sous un petit volume, ne renferme pas nécessairement des spores du *bacillus subtilis*.

J'ai constaté d'ailleurs directement qu'en faisant bouillir de l'eau dans un ballon pendant une heure et plus, puis ajoutant un liquide neutre stérile, il se produisait des *bacillus*.

L'eau distillée prise dans les réservoirs ordinaires de nos laboratoires se comporte à peu près comme l'eau du robinet, et cela parce qu'elle a été recueillie dans des vases eux-mêmes lavés avec l'eau du robinet. L'altération a seulement lieu moins souvent. Mais, si l'eau distillée est recueillie dans des vases flambés, à l'abri des poussières de l'air, elle ne provoque jamais d'altération, lors même qu'elle n'a pas été chauffée, ainsi que l'ont constaté MM. Pasteur et Joubert.

Cette non-continuité des spores dans l'eau du robinet et l'eau distillée montre pourquoi il est nécessaire d'ajouter artificiellement des spores aux liquides sur lesquels on opère pour avoir des résultats comparables; sans cela, on pourrait avoir des infusions qui tantôt s'altèrent et tantôt se conservent, de sorte qu'on ne pourrait plus rien conclure. C'est pour cela qu'il faut dire que l'eau bouillie pendant très-longtemps PEUT ne pas être stérile, et que les infusions neutres ou légèrement alcalines s'altèrent *le plus souvent* après l'ébullition.

Peut-être est-ce là la cause pour laquelle le professeur Tyndall a obtenu des résultats contradictoires.

Mais alors il semble impossible de stériliser même des liquides acides par une simple ébullition dans des ballons non flambés, car il y a toujours des parois qui ne sont pas mouillées par le liquide acide et sur lesquelles peuvent rester des spores qui contagionnent ensuite le liquide. Cependant nous savons que les liquides notablement acides se conservent lorsqu'on les fait bouillir pendant quelques minutes dans des ballons non flambés. La cause de cette apparente contradiction est due à ce que les spores qui résistent à la température de 100 degrés se développent péniblement dans les liquides peu acides et même pas du tout si l'acidité est suffisante.

Que l'on prenne, en effet, des spores qui ont été portées à 100 degrés

pendant quelques minutes et qu'on les ensemence dans des liquides stériles dont les acidités vont progressivement en augmentant à partir de la neutralité, et voici ce que l'on constate : dans les liquides où l'acidité est faible, c'est-à-dire lorsqu'elle est égale à 1 ou 2 centimètres cubes d'acide sulfurique normal décime pour 20 centimètres cubes de liquide, il y a développement; dans les autres, le liquide reste limpide. D'ailleurs, plus les spores ont été chauffées pendant longtemps et plus elles ont de difficultés à se développer dans les liquides légèrement acides. Ainsi, des spores portées à 100 degrés pendant une heure ne se sont pas développées dans un liquide dont l'acidité était 1 environ, tandis que des spores non chauffées se sont développées, quoique péniblement, dans un liquide dont l'acidité était de $2\frac{1}{2}$ à 3.

Ces résultats nous montrent la nécessité de flamber les vases dans lesquels on fait bouillir les liquides très-peu acides. C'est sans doute pour cela que le professeur Cohn ne trouve pas de différence sensible dans la résistance des infusions de foin, qu'elles soient neutres ou légèrement acides.

Après avoir constaté la grande résistance des spores placées dans l'eau distillée, j'ai voulu vérifier que ces spores placées dans l'eau légèrement acidulée étaient facilement tuées par la température de 100 degrés. A cet effet, je remplaçai l'eau ordinaire par de l'eau plus ou moins acide et je plongeai les tubes pendant dix minutes dans l'eau bouillante. Or, à ma grande surprise, je constatai que l'eau ayant une acidité de 2, 3, 4 et même 5 centimètres cubes d'acide sulfurique normal décime pour 20 centimètres cubes d'eau produisait encore une altération. Je répétai plusieurs fois l'expérience en la variant de différentes façons et j'obtins toujours le même résultat. Avec une eau plus acide, la stérilité fut complète.

Ainsi, l'eau dont l'acidité est inférieure à 5 n'est pas stérilisée par une immersion de dix minutes dans l'eau bouillante ou par une ébullition directe de quelques minutes dans un vase flambé. L'eau ne se comportait donc pas comme les autres liquides peu acides, car ceux-ci se conservent après qu'on les a fait bouillir dans un ballon flambé.

J'eus alors l'idée que peut-être ces liquides n'étaient pas privés de tous germes vivants, qu'ils renfermaient encore des spores actives, mais qui ne se développaient pas parce que le liquide était légèrement acide.

Et, en effet, en introduisant dans la branche B des liquides dont l'acidité était inférieure à 5 et additionnés de spores, puis plongeant le tube pendant dix minutes dans l'eau bouillante, enfin ensemençant une petite quantité du liquide de la branche B dans le liquide neutre stérile de la branche A, voici ce qu'on constate : au bout de quelques jours, toutes les branches A sont altérées (¹), tandis que toutes les branches B sont parfaitement limpides. Cette expérience a aussi été faite plusieurs fois avec différents liquides et de différentes façons.

Donc, les liquides légèrement acides bouillis ne sont pas stériles au vrai sens du mot, puisqu'ils renferment encore des germes vivants; leur conservation ne prouve qu'une chose : c'est que les germes qui n'ont pas été tués ne peuvent pas se développer dans ces liquides.

Enfin les *bacillus*, dont les spores offrent une si grande résistance à l'action de la chaleur, sont-ils des êtres aérobies ou anaérobies? Il était probable *a priori* qu'ils étaient aérobies, car ils ne donnent lieu à aucun dégagement de gaz pendant leur vie, et ils forment à la surface du liquide un voile ridé et mucoreux comme s'ils venaient tous pour absorber les dernières traces d'oxygène. Et, en effet, en faisant un vide parfait dans un tube, dans l'une des branches duquel on a aspiré un liquide neutre additionné de spores porté à 100 degrés pendant quelques minutes, puis fermant à la lampe en *d*, on ne constate aucun développement; si, au bout de plusieurs jours, on ouvre le tube en *d*, l'air rentre en filtrant sur le coton qui est en C, et l'altération se manifeste très-rapidement. Il est nécessaire que le vide soit très-bien fait dans le tube, car, s'il reste un peu d'oxygène, il se produit un léger développement qui s'arrête presque aussitôt faute d'oxygène; en laissant rentrer l'air, un nouveau développement très-abondant se produit.

Les *bacillus subtilis* sont donc des êtres aérobies.

Voici d'ailleurs une expérience qui montre bien la très-grande avidité de ces organismes pour l'oxygène. On introduit dans la branche A un liquide neutre stérile et dans l'autre branche B le même liquide additionné de spores. On ferme à la lampe le tube en *d* (²). Le développe-

(¹) Le liquide de ces branches avait été éprouvé auparavant, et l'on avait constaté qu'il était parfaitement stérile.

(²) Les effilures *a* et *b* sont toujours fermées à la lampe après l'introduction du liquide.

ment se produit dans la branche B. Au bout de quelques jours on ensemence la branche A, non altérée, avec une goutte du liquide de B; il ne se produit pas de développement et le liquide de A reste limpide, ce qui montre que tout l'oxygène renfermé dans le tube a été absorbé par les organismes de la branche B. En effet, en ouvrant le tube en *d* et laissant rentrer de l'air pur, le développement se produit très-rapidement.

Enfin, les germes du *bacillus subtilis* existent dans l'air. Je l'ai constaté en exposant des liquides neutres stériles dans des vases flambés au contact des poussières de l'air, mais ils sont en faible quantité par rapport aux spores des moisissures. Dans les manipulations des liquides neutres au contact de l'air, on a très-rarement l'occasion de constater la production accidentelle de ces organismes.

Le *bacillus subtilis*, introduit sous la peau d'un cochon d'Inde, ne produit aucune action.

En résumé :

1° Les liquides neutres peuvent être portés pendant très-longtemps à la température de 100 degrés sans être rendus stériles. Le temps nécessaire pour leur stérilisation est variable avec la nature du liquide. Une température de 115 degrés les stérilise complètement et très-rapidement.

2° Les liquides peu acides (ceux dont l'acidité est inférieure à 5 centimètres cubes d'acide sulfurique normal décime pour 20 centimètres cubes de liquide) se conservent lorsqu'on les fait bouillir dans des ballons flambés, mais ils ne sont pas stériles au vrai sens du mot, car ils peuvent encore renfermer des germes vivants qui se développent dans les liquides neutres.

3° L'ébullition de l'eau dans un appareil, même pendant plus d'une heure, peut ne pas être suffisante pour le priver de tous germes vivants.

4° Les *bacillus subtilis*, dont les germes offrent une si grande résistance à l'action de la chaleur, sont des êtres essentiellement aérobies; leur développement est le plus rapide et le plus facile dans les liquides sensiblement neutres et à la température de 38 degrés environ. Ils ne se développent pas du tout dans les liquides notablement acides.

Les conséquences à tirer de ces résultats sont très-importantes :

1° Toutes les fois qu'on voudra manipuler des liquides neutres stériles, il faudra se servir d'appareils flambés.

2° Toutes les fois qu'on voudra recueillir des liquides organiques neutres ou légèrement alcalins pour constater leur conservation, il faudra se servir de vases également flambés.

C'est sans doute parce qu'on se servait de vases qu'on croyait privés de germes par l'ébullition de l'eau qu'on n'était pas encore parvenu à conserver du lait naturel sortant du pis de la vache. J'ai constaté, en effet, que de l'eau, même bouillie pendant longtemps, introduite dans du lait stérile porté à 115 degrés, provoquait son altération. En prenant les précautions nécessaires pour éviter les germes de l'air et ceux pouvant exister sur le pis des animaux, nous avons vu que j'ai pu conserver dans des vases flambés du lait naturel exposé au contact de l'air pur pendant plusieurs mois sans voir apparaître le moindre organisme microscopique. Le sang et l'urine, qu'elle soit acide, neutre ou alcaline, recueillis directement dans des vases flambés, se conservent aussi sans altération au contact de l'air pur, ainsi que M. Pasteur l'avait déjà constaté.

Ces résultats vont aussi nous montrer très-clairement les causes d'erreurs commises par le D^r Bastian, de Londres, dans une expérience qui a eu un certain retentissement, et par laquelle il prétend avoir découvert les conditions physico-chimiques de la génération spontanée de certaines bactéries. Cette expérience consiste à neutraliser de l'urine acide bouillie par une dissolution de potasse portée à la température de 120 degrés. J'ai vu le D^r Bastian dans le laboratoire de M. Pasteur, et voici comment il opère : L'urine, recueillie d'abord dans un vase quelconque, est introduite dans une cornue, ainsi que le tube porté à 120 degrés renfermant la quantité de potasse nécessaire pour la saturation. On étire le col de la cornue, on fait bouillir l'urine directement pendant deux minutes, on ferme le col à la lampe, puis on retourne la cornue de façon que toutes les parois aient été en contact avec l'urine, et on la plonge dans l'eau bouillante pendant huit minutes. Après le refroidissement, on casse le tube renfermant la potasse par une secousse brusque, et l'on porte les cornues à

la température de 50 degrés. Au bout d'un jour ou deux, des *bacillus* apparaissent dans un certain nombre de cornues, mais pas dans toutes, ainsi que le reconnaît le D^r Bastian lui-même. Or, dit le D^r Bastian, l'urine acide bouillie ne renferme pas de germes, la potasse portée à 120 degrés n'en renferme pas non plus; donc les organismes qui ont apparu sont nés spontanément. On voit immédiatement la cause d'erreur. L'urine, étant recueillie dans un vase non flambé et mise dans une cornue non flambée, peut renfermer des spores de *bacillus*; l'acidité de l'urine est en général inférieure à 5 centimètres cubes d'acide sulfurique normal décime pour 20 centimètres cubes de liquide; d'ailleurs, si cette acidité est supérieure au début de l'expérience, elle devient plus faible après les deux premières minutes d'ébullition, et, par suite, lorsqu'on retourne la cornue pour la plonger dans l'eau bouillante, cette acidité n'est plus suffisante pour tuer les germes pouvant exister sur les parois qui n'ont pas encore été mouillées par le liquide. Si l'on ne brise pas le tube de potasse, ces germes ne se développent pas, parce que le liquide est encore acide, mais le développement a lieu dès que le liquide est rendu neutre. Aussi, si l'on répète l'expérience, ainsi que l'a fait M. Pasteur, en recueillant l'urine dans un vase flambé et l'introduisant dans une cornue flambée, il n'y a plus jamais production d'organismes (1). Voici une expérience que j'ai répétée plusieurs fois, et qui montre bien l'importance du flambage des appareils.

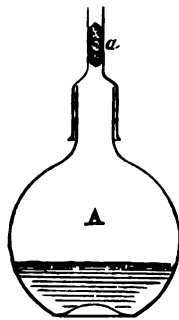
On recueille de l'urine acide dans une fiole flambée. A l'aide d'une pipette également flambée, on introduit le liquide dans une série de tubes flambés et non flambés qu'on ferme ensuite à la lampe et qu'on plonge dans l'eau bouillante pendant dix minutes après les avoir agités de façon à mouiller toutes les parois. Après refroidissement, et à l'aide d'une pipette flambée, on introduit 10 centimètres cubes de liquide de chacun des tubes dans une série de flacons flambés A (*fig. 26*) (2). Avec

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV, p. 178.

(2) Le bouchon de ces flacons, rodé à l'émeri, recouvre exactement le goulot des flacons; en « se trouve un tampon de coton, servant à filtrer l'air qui rentre dans l'appareil, par suite des variations de température. Ces flacons sont très-commodes pour la culture de tous les organismes aérobies.

une autre pipette flambée, on ajoute la quantité de potasse, portée à 115 degrés, nécessaire pour saturer exactement ces 10 centimètres cubes. On porte ces flacons à l'étuve, et au bout de deux ou trois jours on constate que *tous* les flacons qui ont reçu l'urine provenant des tubes flambés sont inaltérés, tandis que *tous* ou *presque tous* ceux qui ont reçu l'urine provenant des tubes non flambés sont altérés. Le petit nombre de ceux qui restent quelquefois inaltérés dans ce dernier cas est dû à ce que, par hasard, l'urine ne renfermait pas de spores, quoique ayant été mise dans des tubes non flambés (').

Fig. 26.



En se servant d'appareils flambés, il n'est même pas nécessaire que l'urine soit notablement acide pour répéter l'expérience du D^r Bastian, et cela tient à ce qu'il y a très-peu de germes, de *bacillus* dans l'air.

Une autre expérience très-simple, qui montre bien aussi l'influence du flamage des vases, consiste à recueillir la même urine normalement neutre dans une fiole flambée et dans une autre non flambée. On fait bouillir les deux liquides pendant le même temps, et l'on constate que le liquide de la fiole non flambée s'altère très-vite, tandis que celui de la fiole flambée se conserve indéfiniment.

(') C'est là une des causes pour lesquelles il y a toujours des cornues qui ne s'altèrent pas dans l'expérience du D^r Bastian; une autre cause est due à ce que, par l'ébullition, l'air est complètement chassé de la cornue.

La même expérience se fait très-facilement avec le lait sortant du pis de la vache, ce qui suffit, pour le dire en passant, pour prouver que les organismes qui se développent dans le lait bouilli ordinaire ne sont pas produits par quelque chose existant normalement dans ce liquide.

Les résultats qui précèdent vont aussi nous expliquer une expérience faite autrefois par MM. Pouchet, Joly et Musset, et invoquée par ces expérimentateurs pour soutenir la théorie de l'hétérogénie. Cette expérience consistait à faire bouillir de l'eau de foin dans un ballon effilé qu'on fermait à la lampe pendant l'ébullition. Le liquide se conservait alors intact. Mais si l'on venait à briser la pointe des ballons dans un endroit quelconque, et qu'on la refermât ensuite, on constatait la production d'organismes microscopiques. Par conséquent, il fallait, dans la théorie des germes et d'après ces observateurs, que l'air renfermât en tous lieux et sous un petit volume des germes de ces organismes, ce qui était évidemment une absurdité. M. Pasteur montra, devant une Commission nommée par l'Académie des Sciences, que, si l'on fait cette expérience avec de l'eau de levûre, il y a toujours un certain nombre de ballons qui restent inaltérés. MM. Pouchet, Joly et Musset ne voulurent pas répéter leur expérience devant la Commission, probablement parce qu'ils ne connaissaient pas les conditions exactes de sa réussite. Ce qui est certain, c'est que cette expérience est parfaitement exacte, et elle peut être répétée avec certitude; mais elle ne prouve absolument rien en faveur de la doctrine de l'hétérogénie. Les spores des organismes qui n'étaient pas tués ne se développaient pas, et l'eau de foin restait limpide, tout simplement parce que l'air avait été complètement chassé du ballon pendant l'ébullition; en brisant la pointe, on laissait rentrer de l'oxygène, et les spores des *bacillus*, inactives jusque-là, pouvaient se développer. Mais les germes de l'air n'avaient rien à voir dans ce développement; et, en effet, le même phénomène se produit si on laisse rentrer de l'air pur qui a filtré sur du coton roussi.

Le professeur Tyndall signale aussi, dans son dernier Mémoire, le fait que, dans une série de ballons d'eau de foin fermés à la lampe pendant l'ébullition, ceux qui s'altéraient ensuite avaient tous une pe-

tite fente à l'endroit de la fermeture. Il conclut que les germes de l'air ont passé à travers cette fente. Cela est possible, mais il est plus probable que la rentrée de l'air n'a agi que par son oxygène pour permettre aux spores non tuées de se développer.

Beaucoup d'autres faits, qui paraissent inexplicables au premier abord, trouvent une explication rationnelle par le résultat de ce travail.



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SEPTIÈME.

	Pages
Recherches sur la cristallisation des solutions sursaturées; par M. D. Gernez.....	9
Sur l'équation de Kepler; par M. Gourier.....	73
Memoire sur l'élimination; par M. Lemonnier.....	77 et 151
Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux; par M. G. Darboux.....	97, 227 et 275
Mémoire sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut; par M. Léon Geoffroy.....	215
Sur un point important de la théorie des perturbations planétaires; par M. F. Tisserand.....	261
Sur les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires; par M. A. Terquem.....	349
Terme général d'une série quelconque, déterminée à la façon des séries récurrentes; par M. Désiré André.....	375
Sur les paramètres différentiels des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes; par M. E. Combesure, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.....	409

SUPPLÉMENT AU TOME VII.

Recherches sur l'origine et le développement des organismes microscopiques; par M. Ch. Chamberland.....	S.3
---	-----

PLANCHES.

PLANCHE I. — Sur les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires.

ements vibratoires perpendiculaires

Fig. 5.

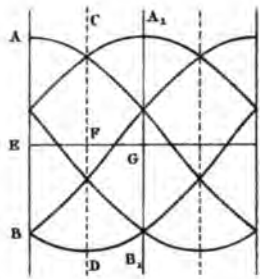


Fig. 6.

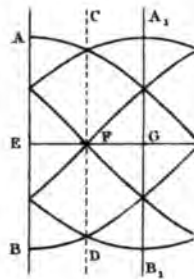


Fig. 11.

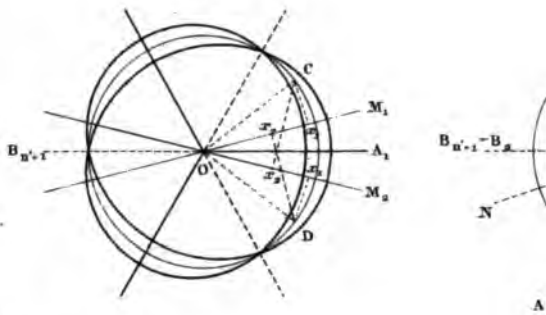


Fig. 14.

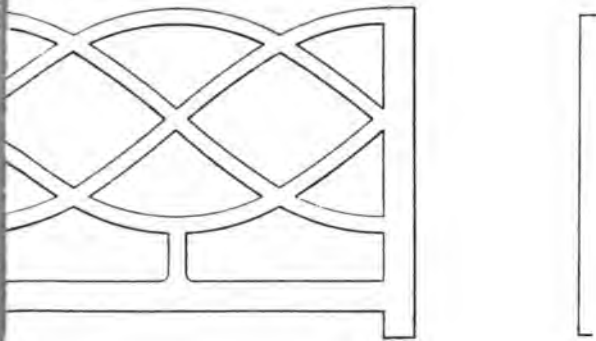
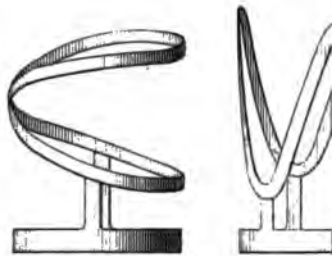


Fig. 17.



[Redacted header information]

[Redacted vertical text]

[Redacted dot]

[Redacted dot]

APR 13 1954

~~~~~

